У. У. Шлыкаў

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 10 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

3-е выданне, перагледжанае і выпраўленае

Мінск «Народная асвета» 2013

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721
Ш69

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзенты:

кафедра геаметрыі, тапалогіі і методыкі выкладання матэматыкі Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта (канд. фіз.-мат. навук дацэнт *Ю. Д. Чурбанаў*); метадыст вышэйшай катэгорыі аддзела агульнаадукацыйных дысцыплін дзяржаўнай установы дадатковай адукацыі дарослых «Віцебскі абласны інстытут развіцця адукацыі» *Т. Т. Талькова*; настаўнік матэматыкі вышэйшай катэгорыі дзяржаўнай установы адукацыі «Міёрская сярэдняя школа № 1» *І. А. Ханецкая*

Шлыкаў, У. У.

Ш69 Геаметрыя : вучэб. дапам. для 10-га кл. устаноў агул. сярэд. адукацыі з беларус. мовай навучання / У. У. Шлыкаў ; пер. з рус. мовы Н. М. Алганавай. — 3-е выд., перагледж. і выпр. — Мінск : Нар. асвета, 2013. — 160 с. : іл.

ISBN 978-985-12-2168-0.

Папярэдняе выданне выйшла ў 2008 г. пад назвай «Геаметрыя, 11».

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-12-2168-0

ЗМЕСТ

Шаноўныя сябры!

Мэта дадзенага вучэбнага дапаможніка — дапамагчы вывучыць раздзел геаметрыі, які называецца стэрэаметрыяй. У папярэдніх класах вы ў асноўным вывучалі ўласцівасці плоскіх фігур, а цяпер прыступаеце да вывучэння прасторавых фігур. У працэсе вывучэння стэрэаметрыі вы будзеце ўдасканальваць навыкі лагічнага мыслення, развіваць прасторавыя ўяўленні, уменні мысленна мадэліраваць новыя геаметрычныя фігуры і будаваць іх графічныя відарысы.

Пры вывучэнні стэрэаметрыі вы будзеце знаёміцца з новымі геаметрычнымі паняццямі і заканамернасцямі, многія з якіх на працягу стагоддзяў прымяняюцца ў вытворчасці, выкарыстоўваюцца ў архітэктуры і жывапісе. Атрыманыя веды дапамогуць вам зразумець, чаму геаметрычныя ўласцівасці выклікаюць нязменны інтарэс у мастакоў і архітэктараў. Напрыклад, тэарэтык мастацтва Ранняга Адраджэння італьянскі вучоны Лявон Баціст Альберці (1404—1472) падкрэсліваў значэнне геаметрыі ў жывапісе, а французскі архітэктар XX стагоддзя Ле Карбюзье (1887—1965) адзначаў, што навакольны свет з’яўляецца светам геаметрыі і што сваімі мастацкімі ўражаннямі чалавек абавязаны менавіта геаметрыі. Творы мастакоў эпохі Адраджэння Леанарда да Вінчы (1452—1519) і Альбрэхта Дзюрэра (1471—1528), велічныя збудаванні архітэктараў старажытнасці і сучаснасці пераканаўча сведчаць аб тым, што геаметрыя была і застаецца вызначальнай у пытаннях гармоніі і прыгажосці.

Для паспяховага вывучэння стэрэаметрыі ў ходзе выкладання тэарэтычнага матэрыялу прыводзяцца рашэнні задач, якія дапамогуць вам замацаваць тэарэтычныя веды, выпрацаваць навыкі прымянення гэтых ведаў на практыцы, дадуць магчымасць атрымаць кансультацыі па метадах рашэння стэрэаметрычных задач. Няхай вывучэнне стэрэаметрыі прынясе вам задавальненне і пераканае ў правільнасці слоў выдатнага французскага матэматыка і філосафа Блэза Паскаля (1623—1662), які лічыў, што «таго, хто валодае геаметрыяй, гэта навука рухае наперад настолькі далёка, што ён становіцца ўзброеным зусім новай сілай».

1

УВОДЗІНЫ Ў СТЭРЭАМЕТРЫЮ

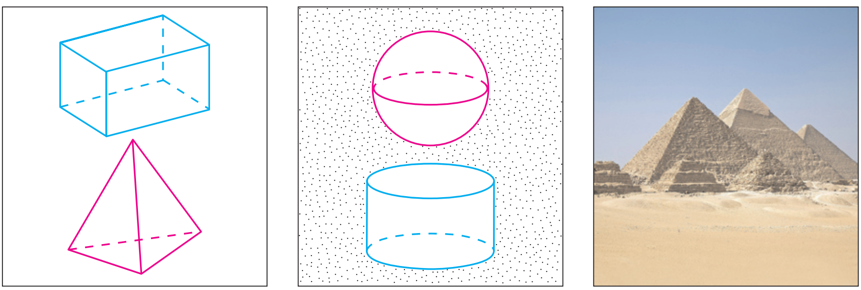


Раздзел I

УВОДЗІНЫ Ў СТЭРЭАМЕТРЫЮ

§ 1. Мнагаграннікі і іх відарысы

1. Прасторавыя фігуры і іх відарысы. У папярэдніх класах мы ў асноўным вывучалі *планіметрыю* — геаметрыю на плоскасці. Цяпер, ведаючы ўласцівасці плоскіх геаметрычных фігур, пачынаем вывучэнне *стэрэаметрыі* (грэч. *стэрэас* — прасторавы) — раздзела геаметрыі, у якім даследуюцца ўласцівасці не толькі плоскіх, але і прасторавых геаметрычных фігур, г. зн. такіх, не ўсе пункты якіх ляжаць у адной плоскасці: напрыклад, паралелепіпед і піраміда (рыс. 1, *а*); шар і цыліндр (рыс. 1, *б*).



а) *б)* *в)*

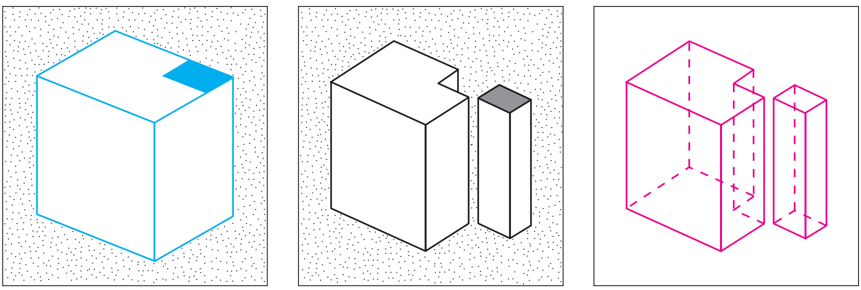
Рыс. 1

Уяўленне аб прасторавых геаметрычных фігурах даюць навакольныя прадметы, калі прымаць да ўвагі толькі іх форму і памеры і не цікавіцца ўсімі астатнімі ўласцівасцямі: колерам, масай і г. д. Напрыклад, апельсін, кропля вады ў беспаветранай прасторы даюць уяўленне аб шары; пачак запалак і многія жылыя будынкі маюць форму паралелепіпеда; грабніцы егіпецкіх фараонаў пабудаваны ў форме піраміды (рыс. 1, *в*).

Пункты і прамыя былі асноўнымі фігурамі ў планіметрыі. Разам з імі ў стэрэаметрыі ў якасці асноўных разглядаюцца і плоскасці. Уяўленне аб частцы плоскасці дае паверхня аконнага шкла, гладкая паверхня пісьмовага стала або мармуровай пліткі.

У стэрэаметрыі, як і ў планіметрыі, выкарыстоўваюцца агульнаматэматычныя паняцці «належаць» або «ляжаць на», «мноства», «лік» і г. д.

У прасторы ёсць бясконца многа плоскасцей, і для кожнай з іх справядлівыя аксіёмы планіметрыі і вынікі з іх. Таму ў далейшым, разглядаючы фігуры, што ляжаць у якой-небудзь плоскасці, будзем карыстацца ўсімі ўласцівасцямі гэтых фігур і тэарэмамі, даказанымі ў планіметрыі. Акрамя таго, адзначым, што *прыметы роўнасці і падобнасці трохвугольнікаў, вывучаныя ў планіметрыі, справядлівыя і для трохвугольнікаў, што ляжаць у розных плоскасцях.*



а) *б)* *в)*

Рыс. 2

У стэрэаметрыі вялікую ролю адыгрываюць прасторавыя ўяўленні, развіццю якіх спрыяюць разнастайныя відарысы фігур. Доказы тэарэм стэрэаметрыі і рашэнні задач суправаджаюцца паказам відарысаў плоскіх і прасторавых фігур на плоскасці рысунка (у сшытку або на дошцы). За відарыс фігуры прымаецца фігура, падобная да яе праекцыі на некаторую плоскасць, і выбіраецца такі відарыс, які дае правільнае ўяўленне аб форме фігуры, з'яўляецца зручным для вывучэння яе ўласцівасцей. Пры гэтым некаторыя нябачныя часткі фігуры для большай нагляднасці паказваюцца штрыхавой лініяй (рыс. 2, *а*, *б*, *в*).

Пералічым найпрасцейшыя правілы пабудавання відарысаў фігур.

1) *За відарыс адрэзка прымаецца адрэзак. Відарыс сярэдзіны адрэзка паказваецца сярэдзінай яго відарыса; віда-*

рысам пункта, што дзеліць адрэзак у адносіне $m : n$, з'яўляецца пункт, што дзеліць яго відарыс у адносіне $m : n$.

2) *Відарысы паралельных прамых* (*адрэзкаў*) *паказваюць паралельнымі прамымі* (*адрэзкамі*).

3) *У якасці відарыса любога трохвугольніка можна прыняць адвольны трохвугольнік.*

З правілаў 2) і 3) вынікае, што за відарыс квадрата, прамавугольніка, ромба, паралелаграма можна прыняць адвольны паралелаграм. У далейшым будзем карыстацца гэтым пры пабудаванні відарысаў фігур.

2. Мнагаграннікі. Раней ужо адзначалася, што адным з аб'ектаў вывучэння стэрэаметрыі з'яўляюцца прасторавыя фігуры, да якіх адносяцца і мнагаграннікі. Дадзім апісанне мнагаграннікаў.

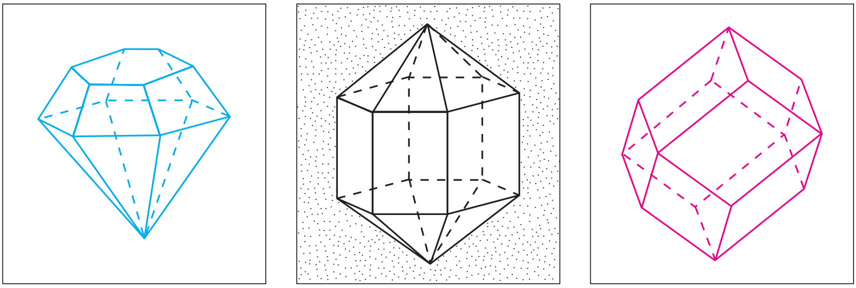
Мнагаграннік уяўляе сабой геаметрычнае цела, абмежаванае канечным лікам плоскіх многавугольнікаў, любыя два з якіх маюць агульную старану і не ляжаць у адной плоскасці; самі многавугольнікі называюцца *гранямі*, іх стараны — *кантамі мнагагранніка*, а іх вяршыні — *вяршынямі мнагагранніка*.

Паняцце геаметрычнага цела і азначэнне мнагагранніка будуць дадзены пазней, а цяпер адзначым, што наглядное ўяўленне аб геаметрычным целе дае частка прасторы, якую займае якое-небудзь фізічнае цела.

Фігура, утвораная ўсімі гранямі мнагагранніка, называецца яго *паверхняй* (*поўнай паверхняй*), а сума плошчаў усіх яго граней — *плошчай* (*поўнай*) *паверхні*.

Уяўленне аб мнагагранніках даюць крышталі розных мінералаў, якія сустракаюцца ў прыродзе. Напрыклад, брыльянт уяўляе сабой алмаз, які агранены пэўным чынам, г. зн. мае форму пэўнага мнагагранніка. Іншымі прыкладамі мадэлей мнагаграннікаў з дастатковай дакладнасцю служаць кніжныя паліцы, шафы, новабудоўлі і г. д. Як бачым, у навакольнай прасторы ёсць мноства разнастайных прадметаў, якія маюць форму мнагаграннікаў.

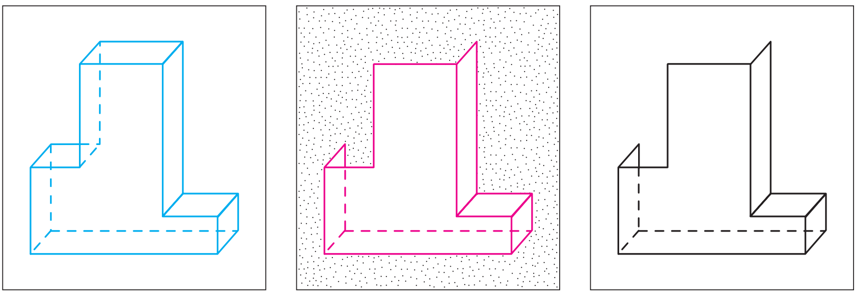
На рысунках 3, *а*, *б*, *в* і 4, *а* паказаны відарысы некаторых мнагаграннікаў.



а) *б)* *в)*

Рыс. 3

А вось многавугольнікі, паказаныя на рысунку 4, *б*, *в*, не абмяжоўваюць часткі прасторы, а значыць, не ўтвараюць паверхню аднаго мнагагранніка.



а) *б)* *в)*

Рыс. 4

Мнагаграннік называецца *выпуклым*, калі ён ляжыць па адзін бок ад плоскасці кожнай сваёй грані. Калі гэта ўмова не выконваецца, то мнагаграннік называецца *нявыпуклым*. Відарысы выпуклых мнагаграннікаў дадзены на рысунках 3, *а*, *б*, *в*. Мнагаграннік, паказаны на рысунку 4, *а*, нявыпуклы.

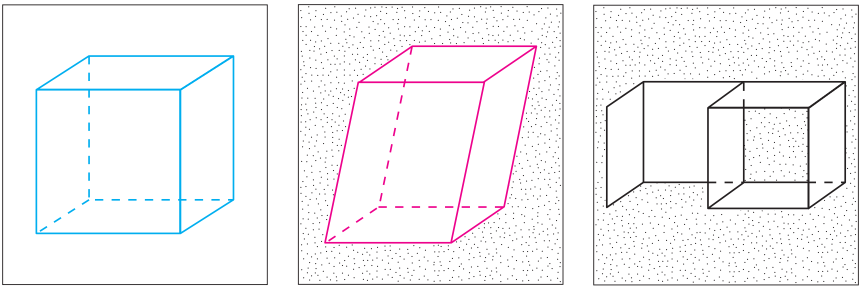
Дадзім апісанне некаторых выпуклых мнагаграннікаў.

3. Куб, паралелепіпед. ***Куб*** — гэта мнагаграннік, што мае *шэсць граней*, якія з'яўляюцца *роўнымі квадратамі*. Стораны квадратаў называюцца *кантамі* куба, а вяршыні — *вяршынямі* куба. На рысунку 5, *а*, *б* паказаны відарысы куба. Відарыс на рысунку 5, *а* з'яўляецца больш наглядным.

Заўважым, што шэсць роўных квадратаў у прасторы могуць быць размешчаны так, што яны не будуць гранямі аднаго куба, напрыклад, як паказана на рысунку 5, *в*.

Паралелепіпед — гэта мнагаграннік, у якога *шэсць граней*, кожная з якіх — *паралелаграм*.

Стораны паралелаграмаў называюцца *кантамі* паралелепіпеда, а іх вяршыні — *вяршынямі* паралелепіпеда. Дзве грані паралелепіпеда называюцца *процілеглымі*, калі яны не маюць агульнага канта, а стораны, якія маюць агульны кант, называюцца *сумежнымі*.



а) *б)* *в)*

Рыс. 5

Часам якія-небудзь дзве процілеглыя грані паралелепіпеда вылучаюцца і называюцца *асновамі*, тады астатнія грані — *бакавымі* гранямі, а іх стораны, якія злучаюць вяршыні асноў паралелепіпеда, — яго *бакавымі* кантамі.

Прамы паралелепіпед — гэта такі паралелепіпед, у якога *бакавыя* грані — прамавугольнікі.

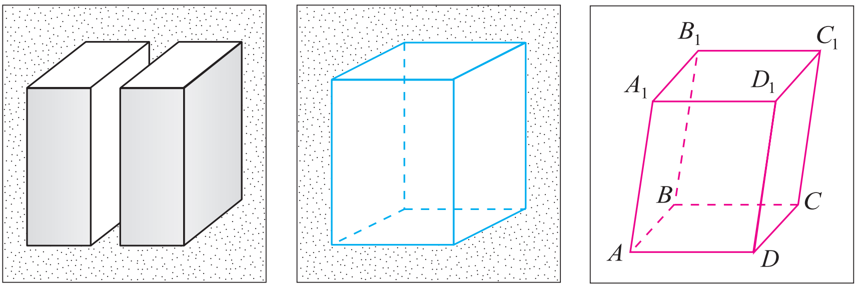
Прамавугольны паралелепіпед — гэта паралелепіпед, у якога *ўсе грані — прамавугольнікі*. Уяўленне аб форме прамавугольнага паралелепіпеда даюць пачак запалак, будаўнічая цагліна або кожная з мадэлей, атрыманых пры распілоўванні на дзве часткі мадэлі куба, зробленай з дрэва, як паказана на рысунку 6, *а*.

Заўважым, што кожны прамавугольны паралелепіпед з’яўляецца прамым паралелепіпедам, *але не любы прамы паралелепіпед з’яўляецца прамавугольным*. Асновай прамога паралелепіпеда можа быць паралелаграм, які не з’яўляецца прамавугольнікам. Уяўленне аб прамым, але не пра-

мавугольным паралелепіпедзе дае, напрыклад, пакой, у якім падлога і столь маюць форму ромба, які не з'яўляецца квадратам.

Відарысы паралелепіпеда паказаны на рысунку 6, *б*, *в*.

Калі асновамі паралелепіпеда з'яўляюцца паралелаграмы $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, то ён абазначаецца $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пры гэтым на рысунку вяршыні паралелепіпеда абазначаны так, што адрэзкі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 з'яўляюцца яго бакавымі кантамі (рыс. 6, *в*).

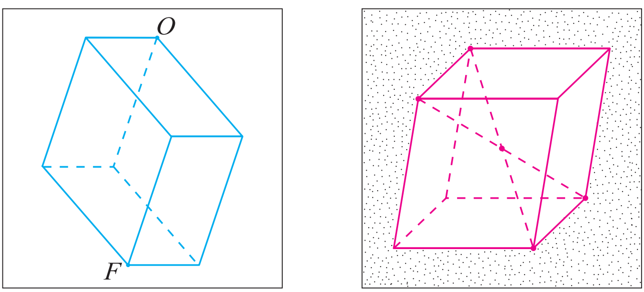


а) *б)* *в)*

Рыс. 6

Дзве вяршыні паралелепіпеда, якія не належаць адной грані, называюцца *процілеглымі*. На рысунку 7, *а* адзначаны процілеглыя вяршыні O і F паралелепіпеда.

Адрэзак, які злучае процілеглыя вяршыні паралелепіпеда, называецца *дыяганаллю паралелепіпеда*. У паралелепіпеда ўсяго чатыры дыяганалі. На рысунку 7, *б* паказаны дзве дыяганалі паралелепіпеда.



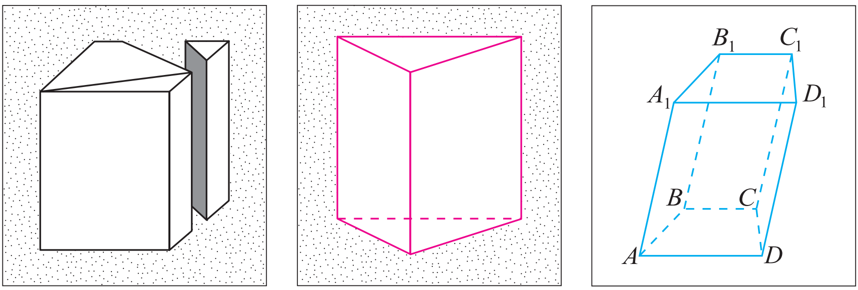
а) *б)*

Рыс. 7

4. Прызма. Піраміда. ***Прызма (n-вугольная)*** — гэта мнагаграннік, у якога дзве грані — роўныя n-вугольнікі, а астатнія n граней — паралелаграмы. Роўныя n-вугольнікі называюцца *асновамі*, а паралелаграмы — *бакавымі гранямі* прызмы.

Прамая прызма — гэта такая прызма, у якой бакавыя грані — прамавугольнікі.

Уяўленне аб форме прамой прызмы даюць, напрыклад, мадэлі, атрыманыя ў выніку распілоўвання драўлянага бруска, які мае форму прамавугольнага паралелепіпеда, уздоўж канта, як паказана на рысунку 8, *а*. Пры гэтым атрымліваюцца дзве мадэлі, адна з якіх уяўляе сабой мадэль прамой пяцівугольнай прызмы, а другая — мадэль прамой трохвугольнай прызмы.



а) *б)* *в)*

Рыс. 8

Правільная n-вугольная прызма — гэта прызма, у якой усе бакавыя грані — прамавугольнікі, а яе асновы — правільныя n-вугольнікі.

Сума плошчаў бакавых граней прызмы называецца плошчай яе *бакавой паверхні* (абазначаецца $S_{\text{бак}}$).

Сума плошчаў усіх граней прызмы называецца *плошчай паверхні прызмы* (абазначаецца $S_{\text{поўн}}$).

Калі асновы прызмы ёсць n-вугольнікі $A_1A_2...A_n$ і $B_1B_2...B_n$, то яна абазначаецца $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$. На відарысе прызмы вяршыні абазначаюцца так, што адрэзкі A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n з'яўляюцца яе бакавымі кантамі. На рысунку 8, *б* паказаны відарыс трохвугольнай прызмы, а на рысунку 8, *в* — чатырохвугольнай, асновы якой — чатырохвугольнікі $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, а яе бакавыя канты — адрэзкі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

Піраміда (n-вугольная) — гэта мнагаграннік, у якога адна грань — які-небудзь n-вугольнік, а астатнія n граней — трохвугольнікі з агульнай вяршыняй; n-вугольнік называецца *асновай*; трохвугольнікі, якія маюць агульную вяршыню, называюцца *бакавымі гранямі*, а іх агульная вяршыня называецца *вяршыняй піраміды*. Стораны граней піраміды называюцца яе *кантамі*, а канты, якія зыходзяцца ў вяршыні, называюцца *бакавымі*.

Піраміда, вяршыня якой — пункт S, а аснова — n-вугольнік $A_1A_2...A_n$, абазначаецца $SA_1A_2...A_n$.

Сума плошчаў бакавых граней піраміды называецца *плошчай бакавой паверхні* піраміды (абазначаецца $S_{бак}$).

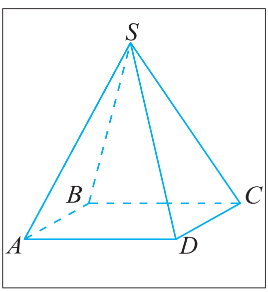
Сума плошчаў усіх граней піраміды называецца *плошчай паверхні* піраміды (абазначаецца $S_{поўн}$).

Правільная n-вугольная піраміда — гэта такая піраміда, аснова якой — правільны n-вугольнік, а ўсе бакавыя канты роўныя паміж сабой.

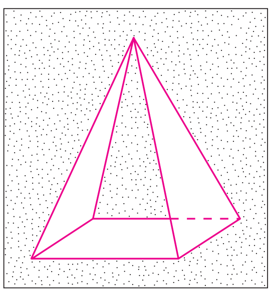
У правільнай піраміды бакавыя грані — *роўныя адзін аднаму раўнабедраныя трохвугольнікі*.

Трохвугольная піраміда называецца *тэтраэдрам*, калі ўсе яе грані — *роўныя правільныя трохвугольнікі*. Тэтраэдр з'яўляецца прыватным выпадкам правільнай трохвугольнай піраміды.

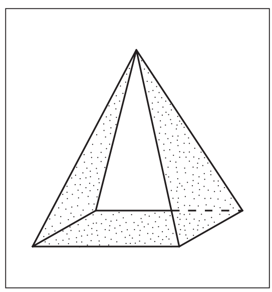
Заўважым, што не кожная правільная трохвугольная піраміда з'яўляецца тэтраэдрам.



а)



б)



в)

Рыс. 9

На рысунку 9, *а* паказаны відарыс правільнай чатырохвугольнай піраміды $SABCD$. Прасторавыя фігуры, дадзеныя на рысунку 9, *б*, *в*, не з'яўляюцца пірамідамі, паколькі па-

казаныя трохвугольнікі і чатырохвугольнік не абмяжоўваюць частку прасторы.

У далейшым пра дадзены відарыс якога-небудзь мнагагранніка часам будзем гаварыць, што дадзены мнагаграннік.

Пытанні і задачы да § 1

1. Якія фігуры ў стэрэаметрыі з'яўляюцца асноўнымі?

2. Ці правільна, што за відарыс прамавугольнага трохвугольніка можна прыняць любы трохвугольнік?

3. Ці правільна, што за відарыс роўнастаронняга трохвугольніка можна прыняць любы трохвугольнік?

4. Дайце апісанне мнагагранніка.

5. Які мнагаграннік з'яўляецца: а) кубам; б) паралелепіпедам; в) прызмай?

6. Ці правільна, што прамая прызма з'яўляецца правільнай? Ці правільна, што прызма, асновамі якой служаць правільныя n-вугольнікі, ёсць правільная прызма?

7. Ахарактарызуйце прамавугольны паралелепіпед.

8. Што называецца: а) плошчай паверхні прызмы; б) плошчай бакавой паверхні прызмы?

9. Які мнагаграннік з'яўляецца пірамідай?

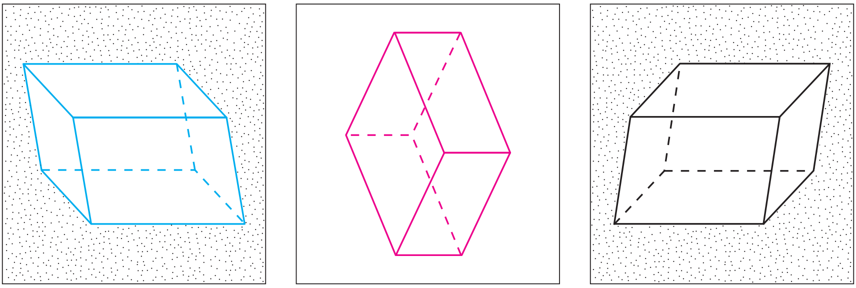
10. Ці праўда, што піраміда, аснова якой — правільны n-вугольнік, з'яўляецца правільнай пірамідай?

11. У чым адрозненне тэтраэдра ад правільнай трохвугольнай піраміды?

12. Што называецца: а) плошчай бакавой паверхні піраміды; б) плошчай паверхні піраміды?

13. Патлумачце, чаму відарысы фігур, паказаныя на рысунку 10, *а*, *б*, *в*, можна прыняць за відарысы: а) паралелепіпеда; б) прамавугольнага паралелепіпеда; в) куба.

14. Ці правільна, што любыя дзве бакавыя грані правільнай n-вугольнай прызмы — роўныя прамавугольнікі?



а) б) в)

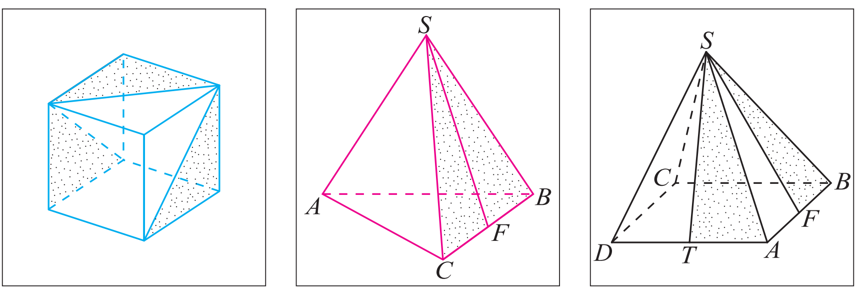
Рыс. 10

15. Ці правільна, што любыя дзве бакавыя грані правільнай n-вугольнай піраміды — роўныя раўнабедраныя трохвугольнікі?

16. На рысунку 11, *а* вылучаны трохвугольнікі, што належаць граням куба. Ці можна сцвярджаць, што кожныя два з іх — роўныя трохвугольнікі?

17. На рысунку 11, *б* адрэзак SF — медыяна бакавой грані SCB правільнай трохвугольнай піраміды $SABC$. Чаму адрэзак SF з’яўляецца вышынёй трохвугольніка CSB?

18. На рысунку 11, *в* пункты T і F — сярэдзіны кантаў AD і AB правільнай чатырохвугольнай піраміды $SABCD$. Растлумачце, чаму вылучаныя на гранях піраміды трохвугольнікі SAT і SBF з’яўляюцца роўнымі.



а) б) в)

Рыс. 11

19. Радыус акружнасці, упісанай у адну з граней куба, роўны 1 см. Вылічыце плошчу паверхні куба.

20. Плошча паверхні тэтраэдра роўна S. Знайдзіце даўжыню канта дадзенага тэтраэдра.

21. Аснова прамавугольнага паралелепіпеда — квадрат, даўжыня дыяганалі якога роўна $\sqrt{2}$ см. Вылічыце даўжыню дыяганалі бакавой грані, калі плошча бакавой грані паралелепіпеда роўна 3 см^2.

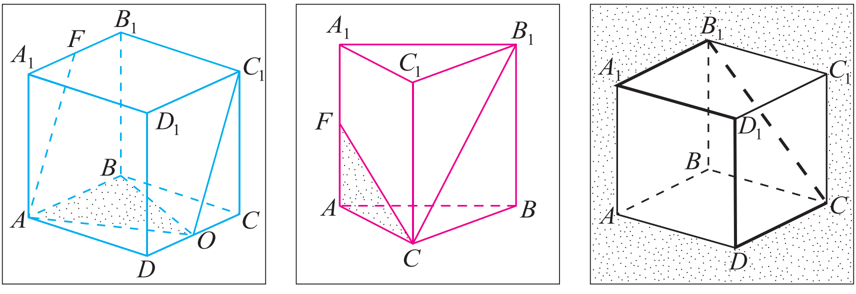
22. Пакажыце ў сшытку відарыс правільнай трохвугольнай піраміды і адзначце на гэтым відарысе пункт перасячэння медыян якой-небудзь з яе граней.

23. Пакажыце відарыс тэтраэдра і адрэзка, які злучае пункты перасячэння медыян дзвюх яго граней.

24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, пункты O і F — сярэдзіны кантаў DC і A_1B_1 адпаведна, $BC = 2$ см. а) Дакажыце, што трохвугольнік AOB раўнабедраны. б) Вылічыце плошчу трохвугольніка AA_1F. в) Вылічыце перыметр трохвугольніка OCC_1 (рыс. 12, *а*).

25. $ABCA_1B_1C_1$ — правільная трохвугольная прызма, усе канты якой роўныя паміж сабой, F — сярэдзіна канта AA_1, $CB_1 = 2\sqrt{2}$ см. Вылічыце: а) даўжыню канта прызмы; б) плошчу асновы прызмы; в) радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка CAF (рыс. 12, *б*).

26. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Даўжыня пpасторавай ломанай $A_1D_1DCB_1A_1$ роўна 4 см (рыс. 12, *в*). Вылічыце плошчу паверхні дадзенага куба.



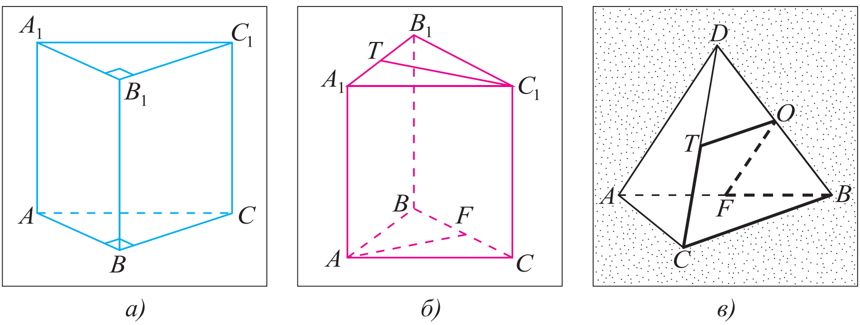
а) *б)* *в)*

Рыс. 12

27. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед, аснова якога — квадрат, даўжыня стараны якога 3 см. Вылічыце даўжыню прасторавай ломанай AD_1B_1CA, калі даўжыня бакавога канта паралелепіпеда роўна 4 см.

28. $ABCA_1B_1C_1$ — прамая трохвугольная прызма, аснова якой — раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік ABC з прамым вуглом пры вяршыні B (рыс. 13, *а*). Вылічыце плошчу грані AA_1C_1C, калі $AB = 2$ см і $AA_1 = 3$ см.

29. $ABCA_1B_1C_1$ — правільная трохвугольная прызма. Пункты T і F — сярэдзіны кантаў A_1B_1 і BC адпаведна (рыс. 13, *б*). а) Ці правільна, што радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка $A_1B_1C_1$, роўны $\frac{2}{3}$ C_1T? б) Дакажыце, што адрэзак AF ёсць вышыня трохвугольніка ABC.



Рыс. 13

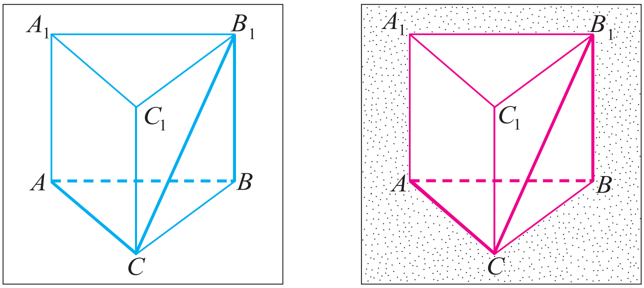
30. $DABC$ — тэтраэдр (рыс. 13, *в*). Пункты T, O і F — сярэдзіны кантаў DC, DB і AB адпаведна. Вылічыце плошчу паверхні тэтраэдра, калі вядома, што даўжыня прасторавай ломанай, утворанай адрэзкамі CB, BF, FO, OT і TC, роўна 9 см.

31. $SABC$ — правільная трохвугольная піраміда, бакавы кант якой у два разы большы за старану асновы. Пункты T, K, P і E — сярэдзіны кантаў SC, SB, BC і AC адпаведна. Вылічыце даўжыню ломанай $TKBPET$, калі сума даўжынь усіх кантаў піраміды роўна 18 см.

32. $ABCA_1B_1C_1$ — правільная трохвугольная прызма, усе канты якой роўныя паміж сабой. Плошча асновы прыз-

мы роўна $4\sqrt{3}$ см². Вылічыце даўжыню прасторавай ломанай $CABB_1C$ (рыс. 14, *а*, *б*).

33. Бакавы кант правільнай трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ у два разы большы за старану асновы. Вылічыце плошчу бакавой паверхні прызмы, калі даўжыня ломанай, утворанай адрэзкамі AA_1, A_1C, CB_1, B_1B і BA, роўна $\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)$ см.

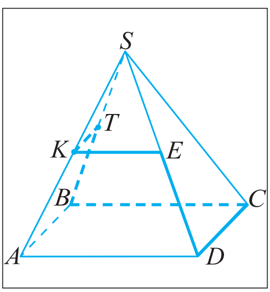


а) *б)*

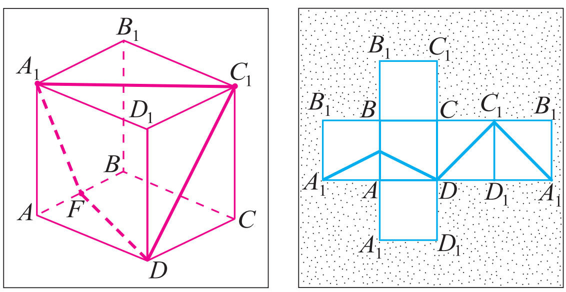
Рыс. 14

34. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, бакавы кант якой у два разы большы за старану асновы. Пункты T, K і E — сярэдзіны яе кантаў SB, SA і SD адпаведна (рыс. 15). Вылічыце даўжыню прасторавай ломанай, утворанай адрэзкамі DC, CB, BT, TK, KE і ED, калі плошча асновы піраміды роўна 16 см².

35. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ усе канты роўныя паміж сабой. Пункты T і K — сярэдзіны кантаў SC і BC адпаведна. Вылічыце плошчу асновы піраміды, калі даўжыня ломанай $KTSDK$ роўна $(4+\sqrt{5})$ см.



Рыс. 15



а) *б)*

Рыс. 16

36. На рысунках 16, *а*, *б* паказаны відарыс куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і яго разгортка, пункт F — сярэдзіна канта AB куба. Вылічыце радыус акружнасці, упісанай у грань куба, калі даўжыня ломанай $A_1FDC_1A_1$ роўна $\left(2\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)$ см.

37. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед, аснова якога — квадрат. Плошча бакавой паверхні паралелепіпеда роўна 672 см^2, а радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік DD_1C, роўны 3 см. Вылічыце даўжыні кантаў паралелепіпеда.

38. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служыць квадрат. Даўжыня дыяганалі бакавой грані паралелепіпеда роўна 13 см, а радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік DAA_1, роўны 2 см. Вылічыце плошчу бакавой паверхні паралелепіпеда.

39. $TABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, даўжыня бакавога канта якой роўна 8 см. Пункт K — сярэдзіна канта TC. Вылічыце плошчу бакавой паверхні піраміды, калі $DK = 6$ см.

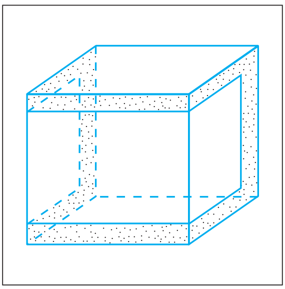
40. Плошча бакавой паверхні правільнай чатырохвугольнай піраміды $TABCD$ роўна $4\sqrt{15}$ см^2, а даўжыня бакавога канта — 4 см. Вылічыце плошчу асновы $ABCD$ піраміды, калі радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік TDC, роўны $\frac{15}{5}$ см.

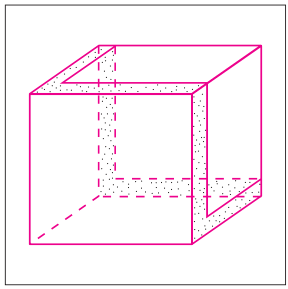
41. $ABCA_1B_1C_1$ — прамая трохвугольная прызма, аснова якой — прамавугольны трохвугольнік ABC. Даўжыня бакавога канта прызмы роўна 8 см. Вылічыце плошчу бакавой паверхні прызмы, калі радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC, роўны 2 см, а радыус апісанай каля яго акружнасці — 5 см.

42. Асновай прамой прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з'яўляецца паралелаграм $ABCD$, дыяганалі якога перасякаюцца ў пункце O. Рознасць паміж перыметрамі трохвугольнікаў BOC і ABO роўна 8 см, а перыметр асновы прызмы — 32 см. Вылічыце даўжыні дыяганалей бакавых граней прызмы, калі плошча яе бакавой паверхні роўна 160 см^2.

43. Аснова прамой прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — раўнабедраная трапецыя $ABCD$, у якую ўпісана акружнасць. Даўжыня бакавой стараны трапецыі роўна 6 см і ўтварае з асновай трапецыі вугал, градусная мера якога 30°. Вылічыце даўжыню бакавога канта прызмы, калі плошча яе паверхні роўна 84 см^2.

44. На паверхні куба размешчана палоска, шырыня якой 1 см. Вылічыце: а) плошчу паверхні куба, калі плошча палоскі роўна 44 см^2 (рыс. 17, *а*); б) аб'ём куба, калі плошча палоскі роўна 45 см^2 (рыс. 17, *б*).


а)


б)

Рыс. 17

45. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, усе канты якой роўныя паміж сабой. Пункты T і F — сярэдзіны кантаў SA і SC адпаведна. Вылічыце плошчу бакавой паверхні піраміды, калі плошча трохвугольніка DTF роўна $8\sqrt{5}$ см^2.

46. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ даўжыня бакавога канта ў два разы большая за даўжыню стараны асновы. Вылічыце радыус акружнасці, апісанай каля грані SCD, калі плошча трохвугольніка SAC роўна $2\sqrt{7}$ см^2.

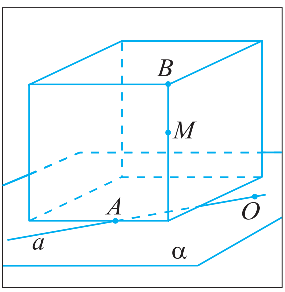
§ 2. Аксіёмы стэрэаметрыі

У першым параграфе ўжо адзначалася, што ў стэрэаметрыі асноўнымі фігурамі з'яўляюцца пункты, прамыя і плоскасці. Як і ў планіметрыі, пункты абазначаюцца вялікімі лацінскімі літарамі A, B, C, ..., а прамыя — маленькімі лацінскімі літарамі a, $в$, c, ... або дзвюма вялікімі лацінскімі літарамі AB, CE і г. д., плоскасці — маленькімі літарамі грэчаскага алфавіта α, β, γ і г. д.

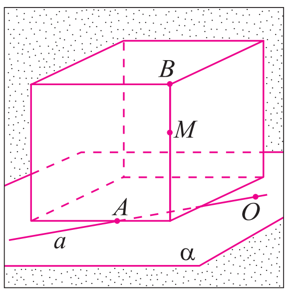
Калі пункт A ляжыць на прамой a (у плоскасці α), то гавораць, што прамая a (плоскасць α) праходзіць праз пункт A, і пішуць: $A \in a$ ($A \in \alpha$).

Калі пункт B не належыць прамой a (плоскасці α), то гавораць, што прамая a (плоскасць α) не праходзіць праз пункт B, і пішуць: $B \notin a$ ($B \notin \alpha$).

Напрыклад, на рысунку 18, *а*, *б* паказаны пункты A і O, якія ляжаць на прамой a, і пункты B і M, якія не ляжаць у плоскасці α, дзе α — плоскасць, у якой ляжыць грань куба (рыс. 18, *а*, *б*).



а)



б)

Рыс. 18

Уласцівасці геаметрычных фігур у прасторы вызначаюцца шляхам лагічных разважанняў на аснове некаторых сцверджанняў (аксіём), якія прымаюць без доказаў.

Частка аксіём, што выкарыстоўваюцца ў стэрэаметрыі, ужо вядома з курса планіметрыі. Тут сфармулюем толькі

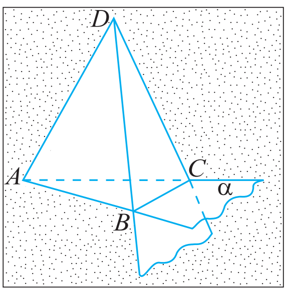
тры аксіёмы аб узаемным размяшчэнні пунктаў, прамых і плоскасцей, якія з'яўляюцца спецыфічна прасторавымі.

А 1. ***Праз любыя тры пункты, што не ляжаць на адной прамой, праходзіць адзіная плоскасць.***

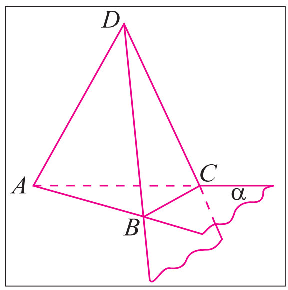
Плоскасць, якая праходзіць праз пункты A, B і C, што не ляжаць на адной прамой, абазначаюць ABC або (ABC).

Напрыклад, на рысунку 19, *а*, *б* паказаны відарыс трохвугольнай піраміды $DABC$. Плоскасць α праходзіць праз пункты A, B і C; праз пункты C, B і D праходзіць плоскасць CBD.

На аксіёме **А 1** грунтуецца будова штатываў некаторых вымяральных прылад. Завостраныя канцы ножак штатыва размешчаны ў адной плоскасці, таму вымяральная прылада мае ўстойлівае становішча.



а)



б)

Рыс. 19

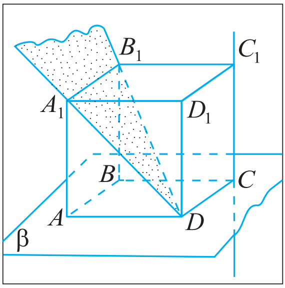
А 2. ***Калі два пункты прамой ляжаць у плоскасці, то ўсе пункты прамой ляжаць у гэтай плоскасці.***

Калі кожны пункт прамой a ляжыць у плоскасці β, то гавораць, што прамая a ляжыць у плоскасці β або плоскасць β праходзіць праз прамую a, і пішуць: $a \subset \beta$.

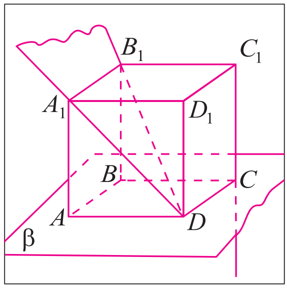
На рысунку 20, *а*, *б* ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб) β — плоскасць, якая праходзіць праз пункты A, D і C. Прамая AD ляжыць у плоскасці β, а прамыя DB_1 і CC_1 у плоскасці β не ляжаць. Плоскасць DA_1B_1 не праходзіць праз прамую AD.

Калі прамая a і плоскасць α *маюць толькі адзін агульны пункт O, то гавораць, што яны перасякаюцца ў пункце O, і пішуць*: $O = a \cap \alpha$.

На рысунку 20, *а*, *б* паказаны відарысы прамой CC_1, якая перасякае плоскасць β у пункце C, і прамой DB_1, якая перасякае плоскасць β у пункце D $(D = \beta \cap DB_1)$.



а)

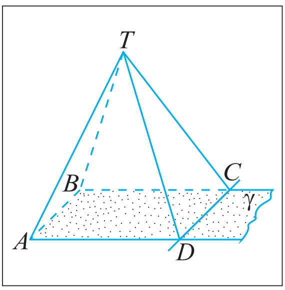


б)

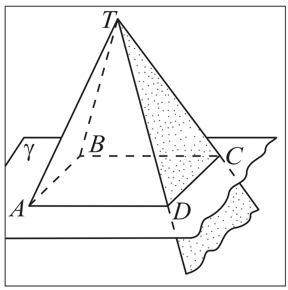
Рыс. 20

А 3. ***Калі дзве плоскасці маюць агульны пункт, то яны маюць агульную прамую, на якой ляжаць усе агульныя пункты гэтых плоскасцей.***

Калі прамая a — агульная прамая плоскасці α і плоскасці β, то гавораць, што гэтыя плоскасці перасякаюцца па прамой a, і пішуць: $a = \alpha \cap \beta$.



а)

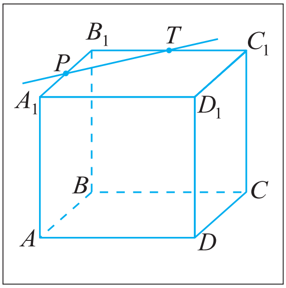


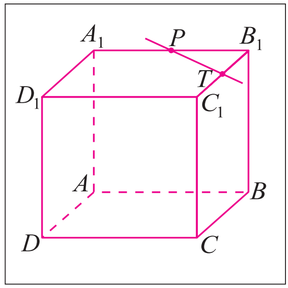
б)

Рыс. 21

Напрыклад, на рысунку 21, *а*, *б* γ — плоскасць, якая праходзіць праз вяршыні A, D і C чатырохвугольнай пірамiды $TABCD$. Прамая CD ляжыць у кожнай з плоскасцей γ і TDC (пункты C і D ляжаць у кожнай з гэтых плоскасцей, значыць, па аксіёме **А 2** прамая CD агульная для плоскасцей γ і TDC), такім чынам, названыя плоскасці перасякаюцца па прамой CD, г. зн. $CD = \gamma \cap (TDC)$.

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Пункты P і T — сярэдзіны кантаў A_1B_1 і B_1C_1 адпаведна. Дакажыце, што прамая PT ляжыць у плоскасці $A_1B_1C_1$.





Рыс. 22

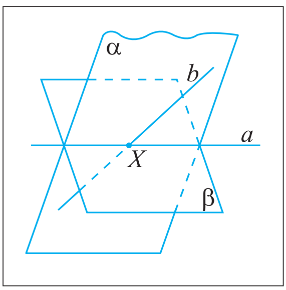
Доказ.

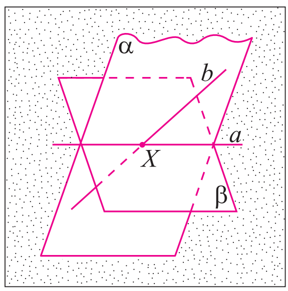
1) Паколькі $B_1C_1 \subset (A_1B_1C_1)$ і $T \in B_1C_1$, то па аксіёме **А 2** пункт $T \in (A_1B_1C_1)$.

2) Паколькі $A_1B_1 \subset (A_1B_1C_1)$ і $P \in A_1B_1$, то $P \in (A_1B_1C_1)$.

3) Такім чынам, $T \in (A_1B_1C_1)$ і $P \in (A_1B_1C_1)$, значыць, $PT \subset (A_1B_1C_1)$ (аксіёма **А 2**) (рыс. 22, *а*, *б*).

Задача 2. Плоскасці α і β перасякаюцца па прамой *a*, а прамая *b*, што ляжыць у плоскасці α, перасякаецца з плоскасцю β. Дакажыце, што прамыя *a* і *b* перасякаюцца.



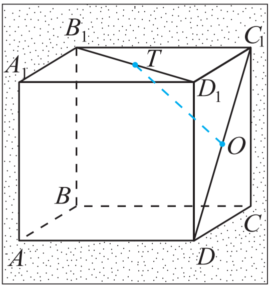


Рыс. 23

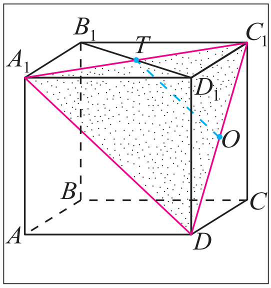
Доказ.

Няхай прамая *b* і плоскасць β перасякаюцца ў пункце *X* (рыс. 24, *а*, *б*). Паколькі прамая *b* ляжыць у плоскасці α, то кожны яе пункт, а значыць, і пункт *X* ляжыць у гэтай плоскасці. Такім чынам, пункт *X* — агульны пункт плоскасцей α і β. Плоскасці α і β перасякаюцца па прамой *a*, таму на гэтай прамой ляжаць усе агульныя пункты плоскасцей α і β (аксіёма **А 3**), а значыць, і пункт *X* ляжыць на прамой *a*. Такім чынам, пункт *X* ляжыць на кожнай прамой *a* і *b*, г. зн. прамыя *a* і *b* перасякаюцца ў пункце *X*.

Задача 3. Дадзены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пункты T і O — сярэдзіны адрэзкаў B_1D_1 і C_1D адпаведна. Знайдзіце даўжыню адрэзка TO, калі кант куба роўны a (рыс. 24, *а*).



а)



б)

Рыс. 24

Д а д з е н а:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $T \in B_1D_1$, $B_1T = TD_1$, $O \in DC_1$, $DO = OC_1$, $AD = a$.

З н а й с ц і: даўжыню TO.

Р а ш э н н е.

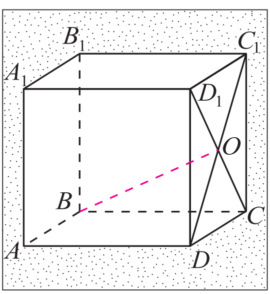
1) Пункт T ёсць пункт перасячэння дыяганалей грані $A_1B_1C_1D_1$, г. зн. сярэдзіна адрэзка A_1C_1. Значыць, адрэзак TO — сярэдняя лінія трохвугольніка A_1C_1D (рыс. 24, *б*).

2) У трохвугольніку A_1AD ($\angle A_1AD = 90°$, $AD = AA_1 = a$) даўжыня гіпатэнузы $A_1D = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$.

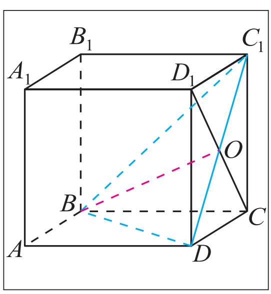
3) Адрэзак TO — сярэдняя лінія трохвугольніка A_1C_1D. Такім чынам, $TO = \frac{1}{2}A_1D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

А д к а з: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Задача 4. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ да пункта перасячэння дыяганалей грані DD_1C_1C, калі кант куба роўны a (рыс. 25, *а*, *б*).



а)



б)

Рыс. 25

Д а д з е н а:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $O = D_1C \cap DC_1$, $AD = a$.

З н а й с ц і: даўжыню BO.

Рашэнне.

1) Трохвугольнік BDC_1 роўнастаронні, паколькі яго стораны — дыяганалі роўных квадратаў: $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = a\sqrt{2}$ (рыс. 25, *б*).

2) Пункт O — сярэдзіна адрэзка DC_1 (дыяганалі квадрата пунктам перасячэння дзеляцца папалам), значыць, адрэзак BO ёсць медыяна трохвугольніка BDC_1.

3) Паколькі трохвугольнік BDC_1 роўнастаронні, то яго медыяна BO з'яўляецца і вышынёй: $BO \perp DC_1$.

4) У трохвугольніку $BDO\left(\angle BOD = 90°,\ BD = a\sqrt{2},\ DO = \frac{1}{2}DC_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ даўжыня катэта $BO = \sqrt{BD^2 - DO^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Адказ: $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Пытанні і задачы да § 2

47. Ці заўсёды праз тры пункты праходзіць адзіная плоскасць?

48. У прасторы дадзены чатыры розныя пункты. Колькі плоскасцей праходзіць праз кожныя тры з гэтых пунктаў?

49. Ці могуць вяршыні замкнутай ломанай з трох звёнаў не належаць ні адной плоскасці?

50. Ці могуць вяршыні замкнутай ломанай з чатырох звёнаў не належаць адной плоскасці?

51. Ці правільна, што прамая ляжыць у плоскасці, калі два яе пункты ляжаць у гэтай плоскасці?

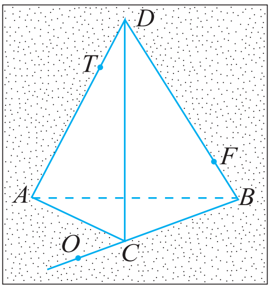
52. Прамая l перасякае стораны трохвугольніка FOK у двух пунктах. Ці правільна, што прамая l ляжыць у плоскасці FOK?

53. Акружнасць апісана каля трохвугольніка ABC. Ці правільна, што ўсе пункты акружнасці належаць плоскасці ABC?

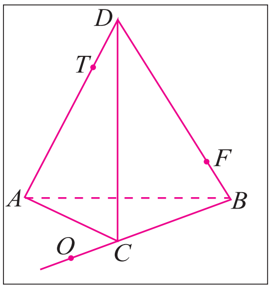
54. Акружнасць мае з плоскасцю два агульныя пункты. Ці правільна, што ўсе пункты акружнасці належаць гэтай плоскасці?

55. Дзве плоскасці маюць два агульныя пункты. Ці правільна, што гэтыя плоскасці маюць агульную прамую?

56. На рысунку 26, *а*, *б* паказаны відарыс трохвугольнай піраміды $DABC$, $T \in AD$, $F \in DB$, $O \in CB$. а) Назавіце прамыя, на якіх ляжыць пункт F. б) Дакажыце, што прамая CT ляжыць у плоскасці ACD. в) Ці правільна, што прамая OF ляжыць у плоскасці DBC? г) Назавіце прамыя, праз якія праходзіць плоскасць ADB.

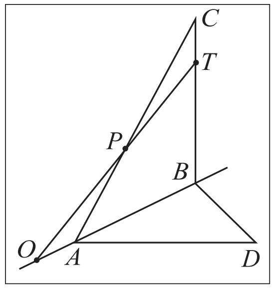


а)



б)

Рыс. 26



Рыс. 27

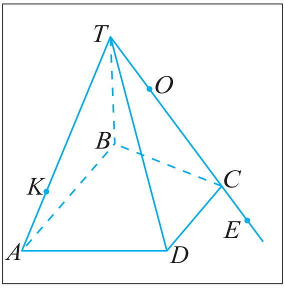
57. Дадзена трохвугольная піраміда $DABC$. Пункт T ляжыць на канце DB, а пункт E — на прадаўжэнні канта DC. Пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой TE і плоскасці ABC; б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці ATE і ABC.

58. Трохвугольнікі ABC і ABD не ляжаць у адной плоскасці (рыс. 27). $O \in AB$, $T \in CB$, $P = AC \cap OT$. а) Назавіце пункт перасячэння прамой PT і плоскасці ABD. б) Па якой прамой перасякаюцца плоскасці TPD і ABD? в) Дакажыце, што прамая TD ляжыць у плоскасці CBD. г) Дакажыце, што пункт O ляжыць у плоскасці TPD.

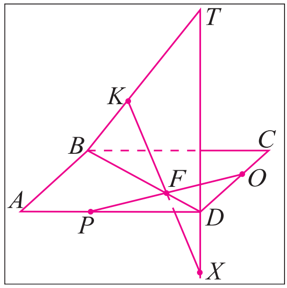
59. Трохвугольнік ABC і паралелаграм $ABED$ ляжаць у розных плоскасцях. Пункт O ляжыць на старане DE, а пункт P — на прадаўжэнні стараны AD. Пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой OP з плоскасцю ABC; б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці ABC і CPO.

60. $TABCD$ — чатырохвугольная піраміда, $K \in AT$, $O \in TC$, $E \in TC$ (рыс. 28). а) Назавіце прамыя, па якіх перасякаюцца

плоскасці ABT і TBC, TBE і TDC. б) Дакажыце, што прамая KO ляжыць у плоскасці ATC. в) Ці правільна, што прамая EK ляжыць у плоскасці ATC?



Рыс. 28



Рыс. 29

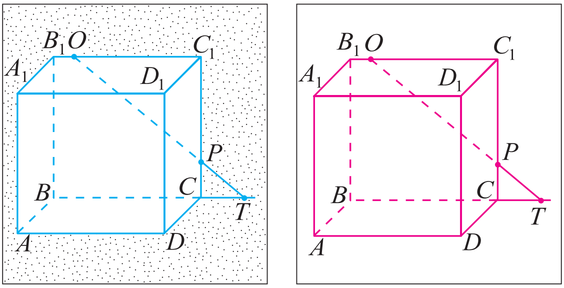
61. Пункты T і K — сярэдзіны кантаў AD і DC піраміды $PABCD$ адпаведна, аснова якой ёсць чатырохвугольнік $ABCD$. Пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой KT і плоскасці PBC; б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці PTK і PBC.

62. На рысунку 29 паказаны відарысы паралелаграма $ABCD$ і трохвугольніка BTD, якія не ляжаць у адной плоскасці. а) Назавіце пункт перасячэння прамой PO і плоскасці BDT. б) Па якой прамой перасякаюцца плоскасці TPO і BDT? в) Ці правільна, што прамая KX ляжыць у плоскасці BDT?

63. Паралелаграмы $ABCD$ і $ABEF$ не ляжаць у адной плоскасці. Пункты K і O — сярэдзіны адрэзкаў CB і BE адпаведна. а) Пабудуйце пункт $X = AK \cap (DCE)$. б) Пабудуйце пункт перасячэння прамой EF і плоскасці AOK. в) Дакажыце, што прамая KO ляжыць у плоскасці CBE.

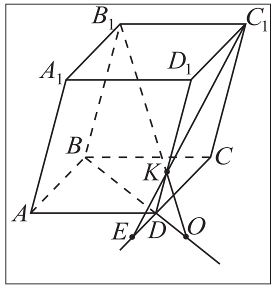
64. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рыс. 30, *а* , *б*), $O \in B_1C_1$, $P \in CC_1$. а) Дакажыце, што прамая OP ляжыць у плоскасці B_1BC. б) Ці правільна, што плоскасці ABB_1 і ABC перасякаюцца па прамой AB? в) Назавіце пункт перасячэння прамой OP і плоскасці ADC.

65. Дадзены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пункты T і E — сярэдзіны кантаў AB і AD адпаведна. Пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой TE і плоскасці D_1DC; б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці TEC і DCC_1.



а) *б)*

Рыс. 30

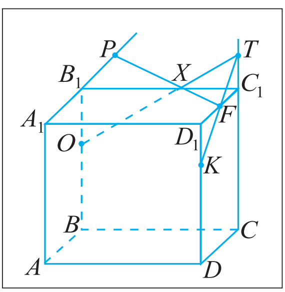


Рыс. 31

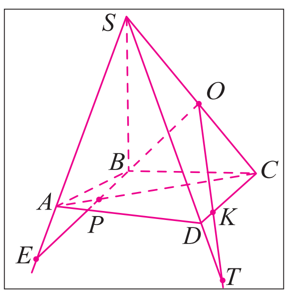
66. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, $K \in DD_1$, $E = C_1K \cap CD$, $O = B_1K \cap BD$ (рыс. 31). а) Назавіце пункт перасячэння прамой B_1K з плоскасцю ADC. б) У якім пункце прамая C_1E перасякае плоскасць ADD_1? в) Ці правільна, што плоскасць B_1C_1K перасякае плоскасць ABC па прамой EO?

67. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед. Пункты E і K — сярэдзіны кантаў AA_1 і AD адпаведна. Пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой EK і плоскасці $B_1A_1D_1$; б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці EKB_1 і $B_1A_1D_1$.

68. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $O \in BB_1$, $K \in DD_1$, $T \in CC_1$, $X = OT \cap B_1C_1$, $F = KT \cap D_1C_1$ (рыс. 32). а) Назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці OTK і $B_1C_1D_1$. б) У якім пункце прамая A_1B_1 перасякае плоскасць OTK? в) Ці правільна, што плоскасці OTK і A_1B_1B перасякаюцца па прамой OP?



Рыс. 32



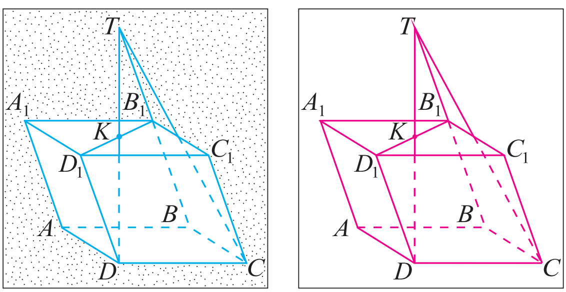
Рыс. 33

69. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пункты T, K і O — сярэдзіны адрэзкаў A_1B_1, B_1C_1 і DC_1 адпаведна. Пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой KT з плоскасцю DD_1C_1; б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці TKO і DD_1C_1.

70. $SABCD$ — чатырохвугольная піраміда, $O \in SC$, $T \in SD$, $E \in SA$, $P = AC \cap OE$, $K = DC \cap OT$ (рыс. 33). а) Дакажыце, што прамая EO ляжыць у плоскасці SAC. б) Назавіце пункт перасячэння прамой OK з плоскасцю SAD. в) Ці правільна, што прамая EO перасякае плоскасць ABC у пункце P? г) Дакажыце, што плоскасці KOP і SAD перасякаюцца па прамой ET.

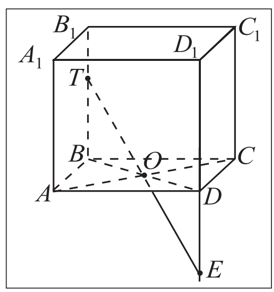
71. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, дыяганалі асновы якой AC і BD перасякаюцца ў пункце O. Пункт T — сярэдзіна адрэзка OA, а пункт E ляжыць на прамой OD так, што $OD = DE$. Пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой TE з плоскасцю SBC; б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці STE і SBC.

72. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, $K \in D_1B_1$, $T = DK \cap BB_1$ (рыс. 34, *а*, *б*). а) Дакажыце, што прамая TD і плоскасць $D_1B_1C_1$ перасякаюцца ў пункце K. б) Назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці TDC і BB_1C_1. в) Ці правільна, што плоскасці DCT і BC_1C перасякаюцца па прамой TC?



а) *б)*

Рыс. 34



Рыс. 35

73. Дадзены паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце: а) пункт O перасячэння плоскасці AB_1C з прамой BD; б) пункт перасячэння прамой DD_1 і прамой B_1O; в) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці AB_1C і DCC_1.

74. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $T \in BB_1$, $O = BD \cap AC$, $E = TO \cap DD_1$ (рыс. 35). а) У якім пункце прамая TE перасякаецца з плоскасцю AB_1C? б) Назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці ATE і BDD_1. в) Ці правільна, што плоскасці AA_1B_1 і ATE перасякаюцца па прамой AT?

75. Пункты T і K — сярэдзіны кантаў D_1C_1 і C_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ адпаведна. Пабудуйце: а) пункт Q, у якім перасякаюцца прамая TK і плоскасць A_1D_1D; б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці BQT і $B_1C_1D_1$.

76. Дадзена трохвугольная піраміда $SABC$. Дакажыце, што любая прамая, якая праходзіць праз вяршыню B і перасякае прамую SC, ляжыць у плоскасці SBC.

77. У прасторы дадзены тры пункты O, A і B, якія не ляжаць на адной прамой. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія праходзяць праз пункт O і перасякаюць прамую AB, ляжаць у адной плоскасці.

78. $SABC$ — трохвугольная піраміда. Дакажыце, што любая прамая, якая не праходзіць праз вяршыню S і перасякае адначасова прамыя SB і SC, ляжыць у плоскасці SCB.

79. У прасторы дадзены тры пункты O, A і B, якія не ляжаць на адной прамой. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія не праходзяць праз пункт O і перасякаюць адначасова прамыя OA і OB, ляжаць у адной плоскасці.

80. Пункты A, B і C не ляжаць на адной прамой. Прамая a праходзіць праз пункт C. Ці правільна, што прамая a ляжыць у плоскасці ABC? Прывядзіце прыклады.

81. Трохвугольнік ABC ляжыць у плоскасці α. Прамая a перасякае адначасова прамыя AB і BC. Ці правільна, што прамая a ляжыць у плоскасці ABC?

82. Дадзена трохвугольная піраміда $TABC$. Пункты O і E — сярэдзіны кантаў TC і TB адпаведна. Дакажыце, што кожны пункт прамой OE ляжыць у плоскасці TCB.

83. Усе пункты медыяны AE трохвугольніка ABC ляжаць у плоскасці α. Ці правільна, што плоскасці ABC і α супадаюць?

84. Вяршыні A, B і пункт O перасячэння медыян трохвугольніка ABC ляжаць у плоскасці α. Дакажыце, што трохвугольнік ABC ляжыць у плоскасці α.

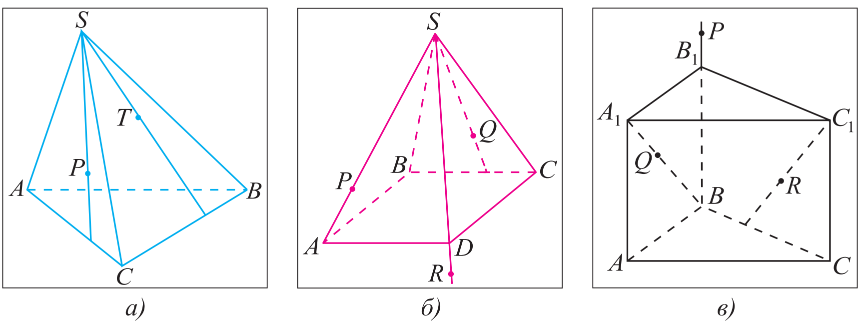
85. Прамая a праходзіць праз пункт перасячэння медыян трохвугольніка ABC. Ці правільна, што прамая a ляжыць у плоскасці α? Прывядзіце прыклады.

86. Дзве сумежныя вяршыні і пункт перасячэння дыяганалей паралелаграма ляжаць у плоскасці α. Дакажыце, што дзве іншыя вяршыні паралелаграма ляжаць у гэтай плоскасці.

87. $SABC$ — трохвугольная піраміда. Пункты P і T ляжаць у гранях SAC і SBC адпаведна (рыс. 36, *а*). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце пункт перасячэння прамой PT з плоскасцю SAB.

88. $SABCD$ — чатырохвугольная піраміда. Пункт O — пункт перасячэння медыян грані SCD. Пабудуйце пункт перасячэння прамой AO з плоскасцю SBC.

89. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда (рыс. 36, *б*). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці PQR і ABC.



Рыс. 36

90. $SABCD$ — чатырохвугольная піраміда. Пункты R і Q ляжаць на бакавых кантах SA і SB адпаведна. Пункт P ляжыць на прадаўжэнні канта BC так, што $BC : CP = 2 : 1$. Пабудуйце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці PQR і SCD.

91. $ABCA_1B_1C_1$ — трохвугольная прызма (рыс. 36, *в*). Перачарціце рысунак у сшытак. Пабудуйце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці PQR і A_1AC.

92. Дакажыце, што любы трохвугольнік, адна са старон якога ёсць кант куба, а процілеглая ёй вяршыня — вяршыня куба, з'яўляецца прамавугольным.

93. Плошча грані куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўна S. Знайдзіце плошчу паверхні чатырохвугольнай піраміды $OA_1B_1C_1D_1$, дзе пункт O — пункт перасячэння дыяганалей грані $ABCD$.

94. У правільнай чатырохвугольнай прызме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даўжыня стараны асновы роўна a. Знайдзіце плошчу паверхні прызмы, калі вугал пры вяршыні C_1 трохвугольніка BC_1D роўны α.

95. Даўжыня канта куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўна 2 см. Вылічыце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік B_1AD.

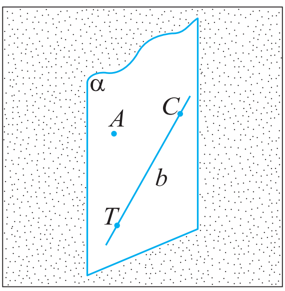
96. $ABCA_1B_1C_1$ — правільная трохвугольная прызма, даўжыня бакавога канта якой роўна 6 см, а стораны асновы — 4 см. Вылічыце плошчу трохвугольніка ACB_1.

97. Пункт T — сярэдзіна канта DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка A_1C_1T, калі даўжыня канта куба роўна α.

§ 3. Вынікі з аксіём

З курса планіметрыі мы ўжо ведаем, што сцверджанне, справядлівасць якога абгрунтоўваецца шляхам лагічных разважанняў, называецца тэарэмай, а само абгрунтаванне — доказам. Дакажам некаторыя вынікі з аксіём. Даказаць тэарэму — значыць шляхам разважанняў абгрунтаваць, што яна вынікае з некаторых аксіём або раней даказаных тэарэм. Відавочнасць не з'яўляецца крытэрыем справядлівасці тэарэм, таму ў працэсе доказаў, звяртаючыся да рысункаў, неабходна адначасова сачыць за правільнасцю разважанняў, каб быць перакананым у справядлівасці атрыманых вынікаў.

Тэарэма 1. ***Праз прамую і пункт, які на ёй не ляжыць, праходзіць адзіная плоскасць.***



Рыс. 37

Дадзена:

пункт A не належыць прамой b.

Даказаць:

існуе адзіная плоскасць, якая праходзіць праз пункт A і прамую b.

Доказ.

I. *Дакажам, што такая плоскасць існуе.*

1) Няхай пункт A не ляжыць на прамой b ($A \notin b$).

2) Адзначым на прамой b два пункты T і C.

3) Пункты A, T і C не ляжаць на адной прамой, значыць, па аксіёме **А 1** праз гэтыя пункты праходзіць некаторая плоскасць α ($A \in \alpha$, $T \in \alpha$, $C \in \alpha$) (рыс. 37).

4) Пункты T і C прамой b ляжаць у плоскасці α, значыць, па аксіёме **А 2** плоскасць α праходзіць праз пункт A і прамую b ($A \in \alpha$, $b \in \alpha$) (гл. рыс. 37).

II. *Дакажам адзінасць гэтай плоскасці.*

1) Дапусцім, што існуе яшчэ адна плоскасць β, якая праходзіць праз пункт A і прамую b.

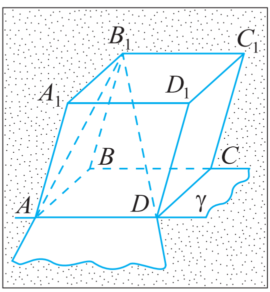
2) Паколькі плоскасць β праходзіць праз прамую b, а пункты T і C ляжаць на прамой b, то плоскасць β праходзіць праз пункты A, T і C, якія не ляжаць на адной прамой.

3) Па аксіёме **А 1** існуе толькі адна плоскасць, якая праходзіць праз пункты A, T і C, што не ляжаць на адной прамой. Значыць, плоскасць β супадае з плоскасцю α.

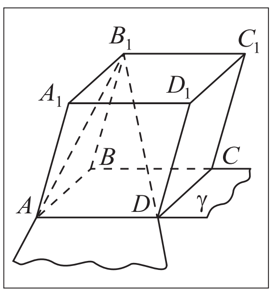
Тэарэма даказана.

Напрыклад, няхай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед (рыс. 38, *а*, *б*). Праз прамую AD і пункт B праходзіць адзіная плоскасць γ, якая супадае з плоскасцю ABD, што праходзіць праз пункты A, B і D. Сапраўды, пункты A і D ляжаць у плоскасці ABD, значыць, прамая AD ляжыць у гэтай плоскасці (аксіёма **А 2**). Плоскасць ABD праходзіць праз пункт B і прамую AD, значыць, яна супадае з плоскасцю γ, паколькі па тэарэме **1** такая плоскасць адзіная.

Праз прамую AD і пункт B_1 праходзіць адзіная плоскасць ADB_1. Плоскасці γ і ADB_1 перасякаюцца па прамой AD (гл. рыс. 38, *а*, *б*).

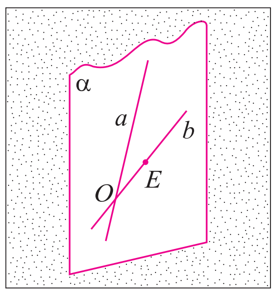


а)



б)

Рыс. 38



Рыс. 39

Т э а р э м а 2. ***Праз дзве прамыя, якія перасякаюцца, праходзіць адзіная плоскасць.***

Д о к а з.

I. *Дакажам існаванне плоскасці.*

1) Няхай прамыя a і b перасякаюцца ў пункце O ($O = a \cap b$), E — некаторы пункт на прамой b, які не супадае з пунктам O (рыс. 39).

2) Тады па тэарэме **1** існуе плоскасць α, якая праходзіць праз пункт E і прамую a ($E \in \alpha$, $a \in \alpha$).

3) Пункты O і E прамой b ляжаць у плоскасці α, значыць, па аксіёме **A 2** плоскасць α праходзіць праз прамую b. Такім чынам, існуе плоскасць α, што праходзіць праз прамыя a і b.

II. *Дакажам, што такая плоскасць адзіная.*

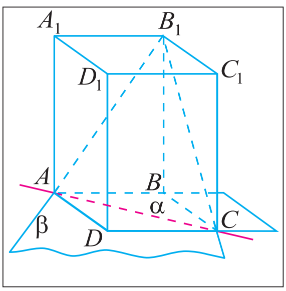
1) Дапусцім, што існуе яшчэ адна плоскасць β, якая праходзіць праз прамыя a і b.

2) Пункт E ляжыць на прамой b, значыць, плоскасць β праходзіць праз пункт E і прамую a. Па тэарэме **1** праз пункт E і прамую a праходзіць адзіная плоскасць, значыць, плоскасць β супадае з плоскасцю α.

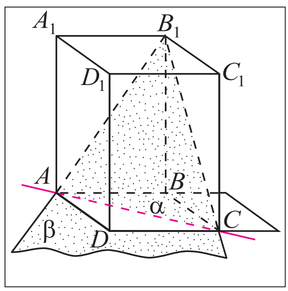
Тэарэма даказана.

Напрыклад, няхай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед (рыс. 40, *а*, *б*). Праз прамыя AD і DC праходзіць адзіная плоскасць α, праз прамыя AB_1 і B_1C праходзіць адзіная плоскасць β.

Плоскасці α і β перасякаюцца па прамой AC ($AC = \alpha \cap \beta$).



а)



б)

Рыс. 40

У заключэнне падкрэслім, што на падставе тэарэм **1** і **2** магчымы яшчэ два спосабы задання плоскасці: а) існуе адзіная плоскасць, якая праходзіць праз прамую і пункт, што ёй не належыць; б) існуе адзіная плоскасць, якая праходзіць праз дзве прамыя, што перасякаюцца.

Пытанні і задачы да § 3

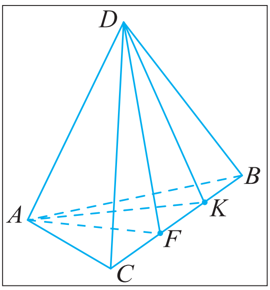
98. Ці правільна, што праз любыя тры пункты праходзіць адзіная плоскасць?

99. Праілюструйце на прыкладах геаметрычных фігур, што не кожныя чатыры пункты ляжаць у адной плоскасці.

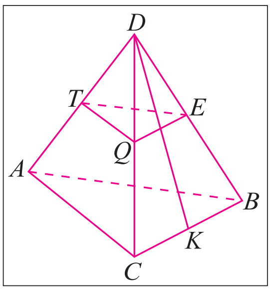
100. Ці правільна, што праз прамую і пункт, які ёй не належыць, праходзіць адзіная плоскасць?

101. Дадзены дзве прамыя, якія перасякаюцца. Ці кожная трэцяя прамая, якая мае з кожнай з дадзеных прамых адзін агульны пункт, ляжыць з імі ў адной плоскасці?

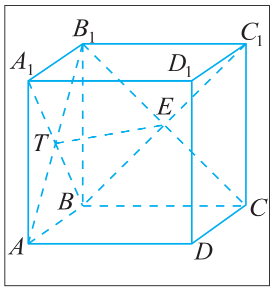
102. $DABC$ — трохвугольная піраміда, пункты F і K ляжаць на канце BC (рыс. 41). Назавіце плоскасці, якія праходзяць праз прамую AD.



Рыс. 41



Рыс. 42



Рыс. 43

103. Ці правільна, што праз любую прамую і пункт праходзіць адзіная плоскасць?

104. У прасторы дадзены прамая a і пункт O, які не ляжыць на ёй. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія праходзяць праз пункт O і перасякаюць прамую a, ляжаць у адной плоскасці.

105. Прамыя a, b і c парамі перасякаюцца і не маюць агульнага пункта. Дакажыце, што яны ляжаць у адной плоскасці.

106. Пункты A, B, C і F не ляжаць у адной плоскасці. Ці могуць прамыя AB і CF перасякацца? Абгрунтуйце адказ.

107. Пункты T, Q і E — сярэдзіны бакавых кантаў тэтраэдра $DABC$ (рыс. 42). Знайдзіце даўжыню медыяны DK трохвугольніка BCD, калі перыметр трохвугольніка TQE роўны 3 см.

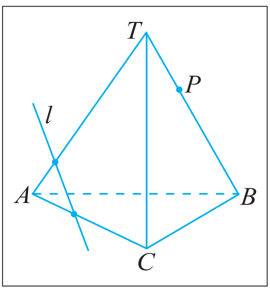
108. Дакажыце, што калі прамыя AB і CD ляжаць у адной плоскасці, то і прамыя AC і BD ляжаць у адной плоскасці.

109. Дзве прамыя a і b перасякаюцца ў пункце O. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія не праходзяць праз пункт O і перасякаюць кожную з дадзеных прамых, ляжаць у адной плоскасці.

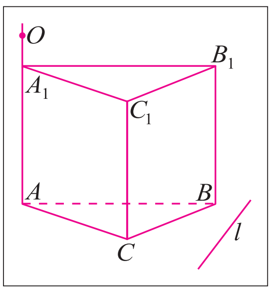
110. Ці правільна, што прамая ляжыць у плоскасці дадзенага трохвугольніка, калі яна перасякае дзве стараны трохвугольніка?

111. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рыс. 43). Даўжыня адрэзка TE роўна 5 см. Вылічыце даўжыню канта куба.

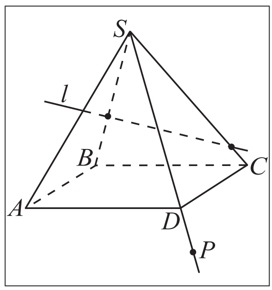
112. $TABC$ — трохвугольная піраміда. Пункт P ляжыць на канце TB, а прамая l ляжыць у плоскасці TAC. Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой l з плоскасцю TBC; б) прамую перасячэння плоскасці TBC з плоскасцю, якая праходзіць праз прамую l і пункт P (рыс. 44).



Рыс. 44



Рыс. 45



Рыс. 46

113. $ABCA_1B_1C_1$ — трохвугольная прызма. Пункт O ляжыць на прадаўжэнні канта AA_1, а прамая l — у плоскасці ABC (рыс. 45). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце: а) пункты перасячэння прамой l з плоскасцямі A_1B_1B і AA_1C; б) прамую перасячэння плоскасці $A_1B_1C_1$ з плоскасцю, якая праходзіць праз прамую l і пункт O.

114. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда. Прамая l ляжыць у плоскасці SBC, а пункт P — на прадаўжэнні канта SD (рыс. 46). Перачарціце рысунак у сшытак

і пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой l з плоскасцю асновы; б) прамую перасячэння плоскасці асновы з плоскасцю, якая праходзіць праз прамую l і пункт P.

115. Пункты P, T і K — сярэдзіны кантаў SC, AD і AB чатырохвугольнай піраміды $SABCD$ адпаведна. Пабудуйце прамую, па якой перасякаецца плоскасць SAD з плоскасцю, што праходзіць праз пункт P і прамую TK.

116. $DABC$ — трохвугольная піраміда, пункт F належыць канту AD і не супадае з вяршынямі піраміды, а пункт O ляжыць на прамой DB так, што пункт B ляжыць паміж пунктамі D і O. Пабудуйце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці ABC і FOC.

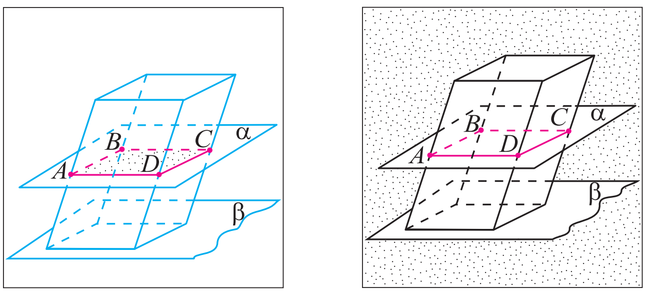
117. $TABC$ — трохвугольная піраміда, пункт P належыць канту AC і не супадае з вяршынямі піраміды, а пункт F ляжыць на прамой CB так, што пункт B ляжыць паміж пунктамі C і F. Пабудуйце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці TAB і TPF.

§ 4. Пабудаванне сячэнняў мнагаграннікаў плоскасцю

Для рашэння задач па стэрэаметрыі часта неабходна ўмець будаваць на рысунку сячэнні мнагаграннікаў (напрыклад, пірамiды, паралелепіпеда, куба, прызмы) некаторай плоскасцю. Патлумачым, што разумеюць пад сячэннем.

Сякучай плоскасцю пірамiды (прызмы, паралелепіпеда, куба) называецца такая плоскасць, па абодва бакі ад якой ёсць пункты дадзенай пірамiды (прызмы, паралелепіпеда, куба).

Сячэннем пірамiды (прызмы, паралелепіпеда, куба) называецца фігура, што складаецца з усіх пунктаў, якія з'яўляюцца агульнымі для пірамiды (прызмы, паралелепіпеда, куба) і сякучай плоскасці.



Рыс. 47

Сякучая плоскасць перасякае грані пірамiды (паралелепіпеда, прызмы, куба) па адрэзках, таму ***сячэнне ёсць многавугольнік***, што ляжыць у сякучай плоскасці, старанамі якога з'яўляюцца названыя адрэзкі.

Напрыклад, на рысунку 47, *а*, *б* паказаны паралелепіпед і сякучая плоскасць α. Сячэннем паралелепіпеда гэтай плоскасцю з'яўляецца чатырохвугольнік $ABCD$. Плоскасць β, у якой ляжыць адна з граней паралелепіпеда, сякучай плоскасцю для яго не з'яўляецца.

Для пабудавання сячэння пірамiды (прызмы, паралелепіпеда, куба), а дакладней, яго відарыса можна пабудаваць

пункты перасячэння сякучай плоскасці з кантамі піраміды (прызмы, паралелепіпеда, куба) і злучыць кожныя два з іх, што ляжаць у адной грані.

Заўважым, што паслядоўнасць пабудавання вяршынь і старон сячэння не з'яўляецца істотнай, але выконваць пабудаванне неабходна з улікам аксіём і тэарэм стэрэаметрыі, а таксама правілаў пабудавання відарысаў фігур. Падкрэслім, што ў аснове пабудавання сячэнняў мнагаграннікаў ляжаць дзве задачы на пабудаванне: а) лініі перасячэння дзвюх плоскасцей; б) пункты перасячэння прамой і плоскасці.

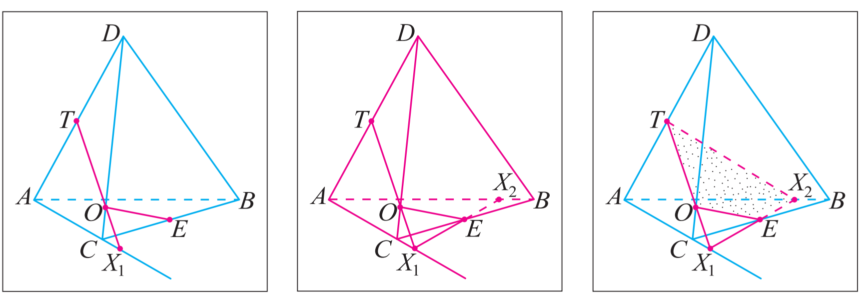
а) Для пабудавання прамой, па якой перасякаюцца некаторыя дзве плоскасці α і β (напрыклад, сякучая плоскасць і плоскасць грані мнагагранніка), трэба пабудаваць два іх агульныя пункты, тады прамая, што праходзіць праз гэтыя пункты, будзе лініяй перасячэння плоскасцей α і β.

б) Для пабудавання пункта перасячэння прамой l і плоскасці α трэба пабудаваць пункт перасячэння прамой l і прамой l_1, па якой перасякаюцца плоскасць α і любая плоскасць, што змяшчае прамую l.

Задача 1. На кантах AD, DC і CB трохвугольнай піраміды $DABC$ дадзены пункты T, O і E адпаведна. Пункт O не з'яўляецца сярэдзінай канта DC (рыс. 48, *а*, *б*, *в*). Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю TOE.

Р а ш э н н е.

1) *Праводзім адрэзкі TO і OE* (гл. рыс. 48, *а*). (Адрэзкі TO і OE ляжаць у сякучай плоскасці і ў гранях ACD і CBD адпаведна, таму з'яўляюцца старанамі шуканага сячэння.)



Рыс. 48

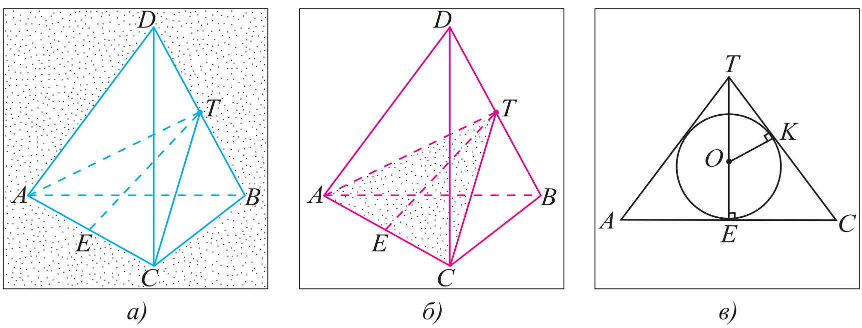
2) *Знаходзім пункт* X_1, *у якім перасякаюцца прамыя* AC *і* TO: $X_1 = AC \cap TO$ (гл. рыс. 48, *б*). (Прамыя AC і TO ляжаць у адной плоскасці і не з'яўляюцца паралельнымі, значыць, перасякаюцца ў пункце X_1.)

3) *Адзначаем пункт* X_2 *перасячэння прамых* X_1E *і* AB: $X_2 = X_1E \cap AB$ (гл. рыс. 48, *в*). ($X_1 \in (ABC)$ і $X_1 \in (TOE)$, акрамя таго, $E \in (ABC)$ і $E \in (TOE)$. Значыць, гэтыя плоскасці перасякаюцца па прамой X_1E. Прамыя X_1E і AB ляжаць у адной плоскасці ABC і не паралельны, значыць, перасякаюцца ў пункце X_2.)

4) *Праводзім адрэзак* X_2T (гл. рыс. 48, *в*). (Пункт X_2 ляжыць у сякучай плоскасці TOE і на канце AB. Значыць, плоскасць TOE перасякае грані ACB і ABD па адрэзках EX_2 і X_2T адпаведна.)

Чатырохвугольнік $TOEX_2$ — шуканае сячэнне.

Задача 2. Пункт T — сярэдзіна канта DB тэтраэдра $DABC$ (рыс. 49, *а*, *б*). Пабудуйце сячэнне тэтраэдра плоскасцю, якая праходзіць праз пункты A, C і T. Вылічыце радыус акружнасці, упісанай у гэта сячэнне, калі даўжыня канта дадзенага тэтраэдра роўна 2 см.



Рыс. 49

Р а ш э н н е.

I. *Будуем сячэнне.*

Пункты T і C ляжаць у кожнай з плоскасцей ATC і DBC, значыць, плоскасць ATC перасякае плоскасць DBC па прамой TC, а, значыць, грань DBC — па адрэзку TC. Аналагічна атрымліваем, што сякучая плоскасць ATC перасякае грань ADB па адрэзку AT, а кожную з граней ADC і ABC —

па адрэзку AC. Такім чынам, трохвугольнік ATC — шуканае сячэнне дадзенага тэтраэдра $DABC$ (гл. рыс. 49, *а*, *б*).

II. *Вылічваем радыус акружнасці.*

1) Паколькі трохвугольнікі ATB і CTB роўныя ($AB = BC = 2$ см, $\angle ATB = \angle CTB = 90°$, TB — агульная старана), то $AT = TC$, г. зн. трохвугольнік ATC раўнабедраны (рыс. 49, *в*).

2) У прамавугольным трохвугольніку CTB ($TB = 1$ см, $BC = 2$ см, $\angle CTB = 90°$) даўжыня катэта $TC = \sqrt{BC^2 - TB^2} = \sqrt{3}$ см.

3) Няхай пункт E — сярэдзіна адрэзка AC, пункт O — цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік ATC, а пункт K — пункт дотыку акружнасці і стараны TC. У прамавугольным трохвугольніку TEC ($\angle TEC = 90°$, паколькі медыяна TE, праведзеная да асновы, у раўнабедраным трохвугольніку ATC з'яўляецца і вышынёй, $CE = 1$ см, $TC = \sqrt{3}$ см) даўжыня катэта $TE = \sqrt{TC^2 - CE^2} = \sqrt{2}$ см.

4) Маем $OE = OK = r$, $OT = TE - OE = \sqrt{2} - r$, дзе r — радыус упісанай акружнасці. Трохвугольнікі TEC і TKO падобныя ($\angle TEC = \angle TKO = 90°$, $\angle ETC = \angle KTO$), значыць, $OT : TC = OK : EC$ або $(\sqrt{2} - r) : \sqrt{3} = r : 1$. Адсюль знойдзем радыус акружнасці: $r = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

Заўважым, што радыус r можна знайсці, выкарыстаўшы формулу $r = \frac{S_{ATC}}{p_{ATC}}$, дзе S_{ATC} і p_{ATC} — плошча і паўперыметр трохвугольніка ATC адпаведна.

Пытанні і задачы да § 4

118. Якая плоскасць называецца сякучай плоскасцю мнагагранніка?

119. Якая фігура называецца сячэннем мнагагранніка?

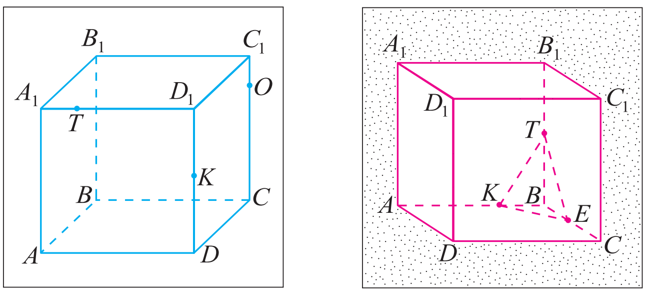
120. Патлумачце, як можна пабудаваць адрэзак, па якім сякучая плоскасць перасякае грань мнагагранніка.

121. Што неабходна пабудаваць для таго, каб атрымаць прамую, па якой перасякаюцца дзве плоскасці?

122. Растлумачце, як будуецца пункт перасячэння прамой і дадзенай плоскасці.

123. На рысунку 50, *а* паказаны відарыс куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $T \in A_1D_1$, $O \in CC_1$, $K \in DD_1$. Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой TK з плоскасцю грані AA_1B_1B; б) сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз пункты T, K і O.

124. Пакажыце відарыс куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз пункты B_1, T і O, дзе пункты T і O — сярэдзіны кантаў AD і DC адпаведна.



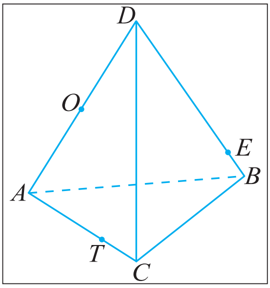
а) *б)*

Рыс. 50

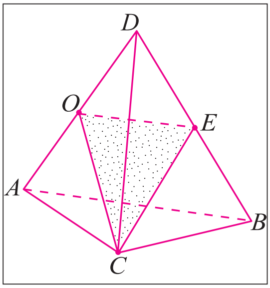
125. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Трохвугольнік KTE — сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз пункты K, T і E — сярэдзіны кантаў AB, BB_1 і BC адпаведна (рыс. 50, *б*). а) Ці правільна, што трохвугольнік KTE роўнастаронні? б) Вылічыце плошчу трохвугольніка KTE, калі даўжыня канта куба роўна 1 см.

126. Пакажыце відарыс куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз пункты A, B_1, C, і вылічыце плошчу паверхні куба, калі плошча пабудаванага сячэння роўна $\sqrt{3}$ см^2.

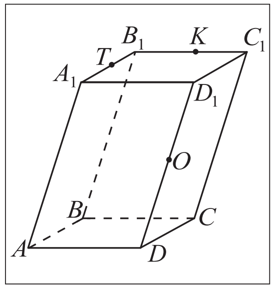
127. На рысунку 51 паказаны відарыс піраміды $DABC$, $O \in AD$, $E \in DB$, $T \in AC$. Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой OT з плоскасцю DCB; б) пункт перасячэння прамой OE з плоскасцю ABC; в) сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункты T, E і O.



Рыс. 51



Рыс. 52



Рыс. 53

128. Пакажыце відарыс трохвугольнай піраміды $ABCD$. Пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз пункты K, E і P, дзе пункты K і E — сярэдзіны кантаў AD і BD, а пункт P ляжыць на прадаўжэнні канта BC.

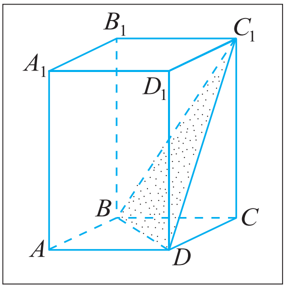
129. Дадзены тэтраэдр $DABC$. Трохвугольнік COE — сячэнне тэтраэдра $DABC$ плоскасцю, якая праходзіць праз пункты C, O і E, дзе пункты O і E — сярэдзіны кантаў AD і DB адпаведна (рыс. 52). а) Дакажыце, што трохвугольнік COE раўнабедраны. б) Вылічыце перыметр трохвугольніка COE, калі даўжыня канта тэтраэдра роўна $2\sqrt{3}$ см.

130. Пакажыце відарыс тэтраэдра $ABCD$. Пабудуйце сячэнне гэтага тэтраэдра плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны кантаў AD, AB, AC, і знайдзіце плошчу гэтага сячэння, калі даўжыня канта тэтраэдра роўна a.

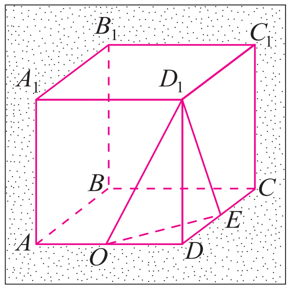
131. На рысунку 53 паказаны відарыс паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $T \in A_1B_1$, $K \in B_1C_1$, $O \in DD_1$. Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой TK з плоскасцю грані AA_1D_1D; б) сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункты T, K і O.

132. Пакажыце відарыс паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз пункты T, P і O — сярэдзіны кантаў BB_1, AD і DC адпаведна.

133. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед, $AB = BC = 3$ см і $CC_1 = 4$ см. Трохвугольнік BDC_1 — сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз прамую BD і вяршыню C_1 (рыс. 54). а) Дакажыце, што трохвугольнік BDC_1 раўнабедраны. б) Вылічыце вышыню трохвугольніка BDC_1, праведзеную да стараны DC_1.



Рыс. 54



Рыс. 55

134. Пакажыце відарыс прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз прамую A_1C_1 і вяршыню D. Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, калі вядома, што радыус акружнасці, апісанай каля прамавугольніка D_1C_1CD, роўны R і $A_1D_1 = D_1C_1 = a$.

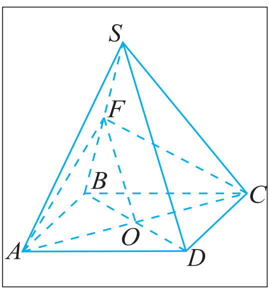
135. Дадзены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пункты O і E — сярэдзіны кантаў AD і DC адпаведна. Трохвугольнік OED_1 — сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз пункты O, E і D_1 (рыс. 55). а) Ці з'яўляецца трохвугольнік OED_1 раўнабедраным? б) Знайдзіце даўжыню канта куба, калі перыметр трохвугольніка OED_1 роўны P.

136. Пакажыце відарыс куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз прамую AC і пункт T, дзе пункт T — сярэдзіна канта BB_1. Вылічыце даўжыню медыяны TO трохвугольніка ATC, калі $AB = 2$ см.

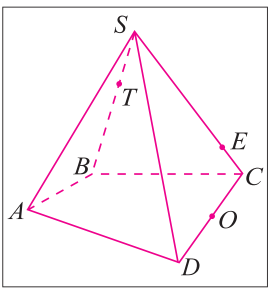
137. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, даўжыня кожнага канта якой роўна 2 см. Трохвугольнік AFC — сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз прамую AC і пункт F — сярэдзіну канта SB (рыс. 56). Вылічыце вышыню FO трохвугольніка AFC.

138. Дадзена правільная чатырохвугольная піраміда $SABCD$, усе канты якой роўныя паміж сабой, пункт K — сярэдзіна бакавога канта SC. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт K і прамую BD. Знайдзіце плошчу асновы піраміды, калі плошча атрыманага сячэння роўна Q.

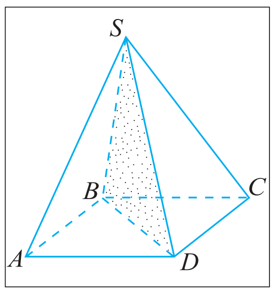
139. На рысунку 57 паказаны відарыс чатырохвугольнай піраміды $SABCD$, $T \in SB$, $E \in SC$, $O \in DC$. Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой TE з плоскасцю асновы піраміды; б) сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункты T, O і E.



Рыс. 56



Рыс. 57



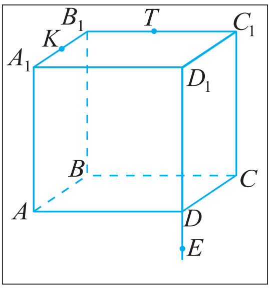
Рыс. 58

140. Пакажыце відарыс чатырохвугольнай піраміды $SABCD$. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны кантаў SA, AD і DC.

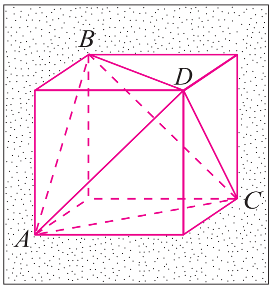
141. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, усе канты якой роўныя паміж сабой. Трохвугольнік SBD — сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыню S і прамую BD (рыс. 58). Знайдзіце плошчу бакавой грані піраміды, калі радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка SBD, роўны R.

142. $TABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыню T і прамую AC. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды, калі плошча трохвугольніка ATC роўна плошчы асновы, а даўжыня стараны асновы роўна a.

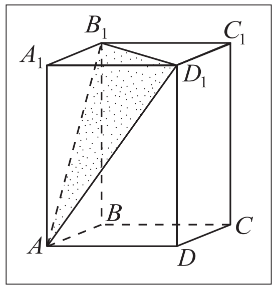
143. На рысунку 59 паказаны відарыс куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $K \in A_1B_1$, $T \in B_1C_1$, $E \in DD_1$. Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце: а) прамую, па якой перасякаюцца плоскасць KTE і плоскасць грані DD_1C_1C; б) сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз пункты K, T і E.



Рыс. 59



Рыс. 60



Рыс. 61

144. Пакажыце відарыс куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны кантаў AA_1, AD і CC_1.

145. На рысунку 60 паказаны відарысы куба і піраміды $ABCD$. Вылічыце плошчу паверхні піраміды, калі даўжыня канта куба роўна 1 см.

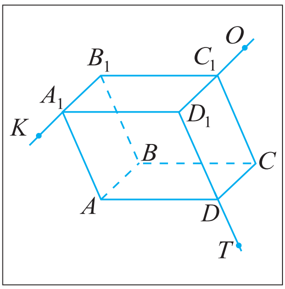
146. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед, аснова якога — квадрат, даўжыня стараны якога a. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю AB_1C. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля бакавой грані паралелепіпеда, калі плошча трохвугольніка AB_1C роўна S.

147. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед, асновай якога з'яўляецца квадрат $ABCD$, $AB = a$. Трохвугольнік B_1AD_1 — сячэнне паралелепіпеда плоскасцю,

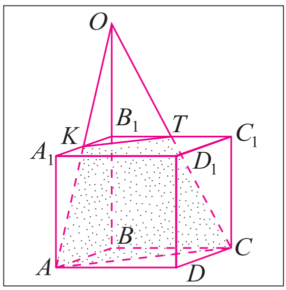
якая праходзіць праз вяршыню A і прамую B_1D_1. Знайдзіце плошчу бакавой грані паралелепіпеда, калі вугал A ў трохвугольніку B_1AD_1 роўны α (рыс. 61).

148. На рысунку 62 паказаны відарыс паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пункты K, O і T ляжаць на прамых A_1B_1, B_1C_1 і DD_1 адпаведна, як паказана на рысунку. Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункты T, K і O.

149. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рыс. 63). Чатырохвугольнік $AKTC$ — сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыні A, C і пункт O такі, што пункт B_1 — сярэдзіна адрэзка OB. Дакажыце, што чатырохвугольнік $AKTC$ — раўнабедраная трапецыя, і вылічыце даўжыню яе сярэдняй лініі, калі даўжыня канта куба роўна $\sqrt{2}$ см.



Рыс. 62

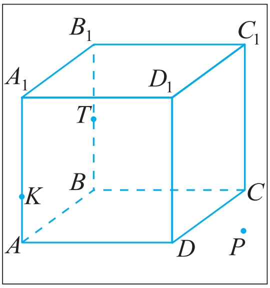


Рыс. 63

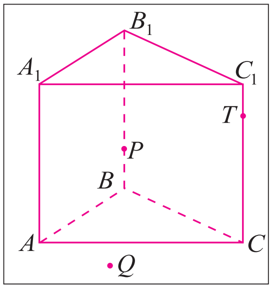
150. Пакажыце відарыс куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз прамую A_1D і пункт K такі, што пункт C_1 — сярэдзіна адрэзка D_1K. Вылічыце перыметр пабудаванага сячэння, калі даўжыня канта куба роўна 1 см.

151. Пакажыце відарыс тэтраэдра $ABCD$ і пабудуйце сячэнне тэтраэдра плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны кантаў DA, DB і DC. Вылічыце плошчу грані тэтраэдра, калі плошча пабудаванага сячэння роўна 6 см^2.

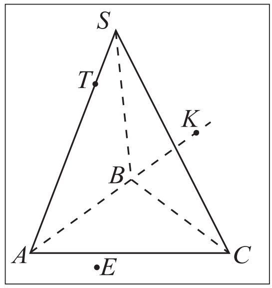
152. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Пункт T — сярэдзіна канта BB_1, пункт K ляжыць на канце AA_1 так, што $AK : KA_1 = 1 : 2$, а пункт P ляжыць у плоскасці грані $ABCD$ (рыс. 64). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой TK з плоскасцю грані $ABCD$; б) сячэнне куба плоскасцю TKP.



Рыс. 64



Рыс. 65



Рыс. 66

153. $SABCD$ — чатырохвугольная піраміда. Пункт T — сярэдзіна канта SA, пункт K ляжыць на канце SC так, што $CK : CS = 1 : 4$, а пункт F ляжыць на прадаўжэнні дыяганалі BD асновы так, што $BD : DF = 2 : 1$. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю TKF.

154. $ABCA_1B_1C_1$ — трохвугольная прызма. Пункты P і T належаць кантам BB_1 і CC_1 адпаведна так, што $BP : PB_1 = 1 : 3$, $CT : TC_1 = 3 : 1$, а пункт Q ляжыць у плоскасці ABC (рыс. 65). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой PT з плоскасцю ABC; б) сячэнне прызмы плоскасцю PTQ.

155. $SABC$ — трохвугольная піраміда. Пункты T і F — сярэдзіны кантаў SA і AC адпаведна, а пункт K — пункт перасячэння медыян грані SBC. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю TKF.

156. $SABC$ — трохвугольная піраміда. Пункт T ляжыць на канце SA, пункт K — на прадаўжэнні канта AB, а пункт E — у плоскасці ABC (рыс. 66). Перачарціце рысунак

у сшытак і пабудуйце: а) пункт перасячэння прамой TK з плоскасцю SBC; б) сячэнне піраміды плоскасцю TKE.

157. $SABCD$ — чатырохвугольная піраміда. Пункт T — сярэдзіна канта SB, а пункты K і E ляжаць на прадаўжэнні кантаў BC і SD адпаведна так, што $BC : CK = 3 : 1$, $SD : DE = 3 : 1$. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю TEK.

158. $ABCA_1B_1C_1$ — правільная трохвугольная прызма, даўжыня стараны асновы якой роўна 8 см, а бакавога канта — 6 см. Вылічыце плошчу сячэння, якое праходзіць праз старану адной асновы і процілеглую вяршыню другой асновы.

159. У тэтраэдры $DABC$ пункт O — сярэдзіна канта BC. Плошча сячэння, якое праходзіць праз пункты A, D і O, роўна S. Знайдзіце плошчу паверхні дадзенага тэтраэдра.

160. $ABCA_1B_1C_1$ — правільная трохвугольная прызма, усе канты якой роўныя паміж сабой. Знайдзіце плошчу сячэння прызмы плоскасцю AB_1C_1, калі плошча паверхні прызмы роўна S.

161. Знайдзіце плошчу паверхні правільнай трохвугольнай прызмы, даўжыня стараны асновы якой роўна a, а плоскасць, што праходзіць праз старану адной асновы і процілеглую вяршыню іншай асновы, дзеліць плошчу паверхні прызмы ў адносіне $2 : 3$.

162. Квадрат $ABCD$ — аснова прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні паралелепіпеда, калі даўжыня яго бакавога канта роўна a, а плошча сячэння плоскасцю BA_1C_1 роўна S.

163. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $TABCD$ плошча сячэння піраміды плоскасцю TAC роўна S. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды, калі ўсе канты піраміды роўныя паміж сабой.

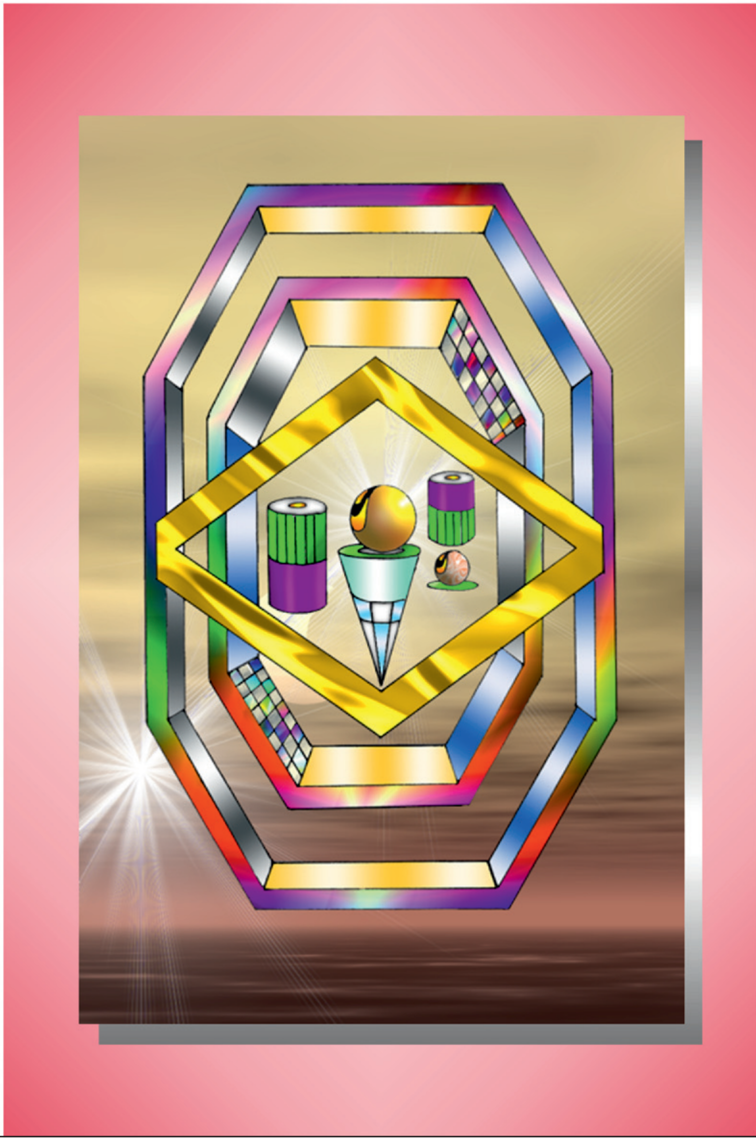
164. Асновай прамога паралелепіпеда з'яўляецца ромб, здабытак даўжынь дыяганалей якога роўны 48 см^2, а радыус

упісанай у яго акружнасці роўны $\frac{12}{5}$ см. Вылічыце плошчу поўнай паверхні паралелепіпеда, калі даўжыня дыяганалі бакавой грані роўна 13 см.

165. У правільнай трохвугольнай пірамідзе даўжыня стараны асновы роўна a, а даўжыня бакавога канта — b. Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз дзве вяршыні асновы і сярэдзіну бакавога канта.

2

ПАРАЛЕЛЬНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ

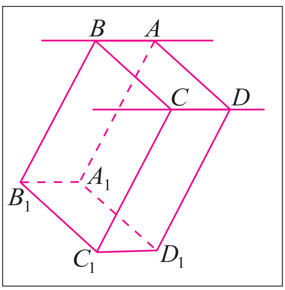


Раздзел 2
ПАРАЛЕЛЬНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ

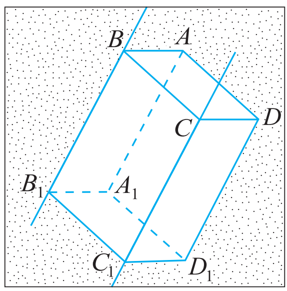
§ 1. Паралельныя прамыя ў прасторы

Азначэнне. Дзве прамыя ў прасторы называюцца паралельнымі, калі яны ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца.

Калі прамыя a і b (AB і CD) паралельныя, то пішуць $a \parallel b$ ($AB \parallel CD$). Напрыклад, калі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ёсць паралелепіпед (рыс. 67, *а*, *б*), то прамыя AB і CD, BB_1 і CC_1 паралельныя.



а)



б)

Рыс. 67

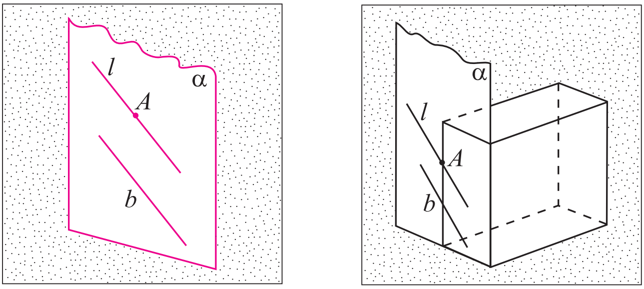
Два адрэзкі (прамені) называюцца паралельнымі, калі яны ляжаць на паралельных прамых. Адрэзак (прамень) называецца паралельным дадзенай прамой, калі ён ляжыць на прамой, паралельнай дадзенай.

Тэарэма 1. ***Праз любы пункт прасторы, які не ляжыць на дадзенай прамой, праходзіць адзіная прамая, паралельная дадзенай прамой.***

Доказ.

1. *Дакажам існаванне прамой.*

Няхай дадзена прамая b і пункт A, які не ляжыць на гэтай прамой. Тады праз іх праходзіць адзіная плоскасць α (рыс. 68, *а*, *б*). У гэтай плоскасці, як вядома з планіметрыі, існуе прамая l, якая праходзіць праз пункт A і паралельная прамой b.



а) б)

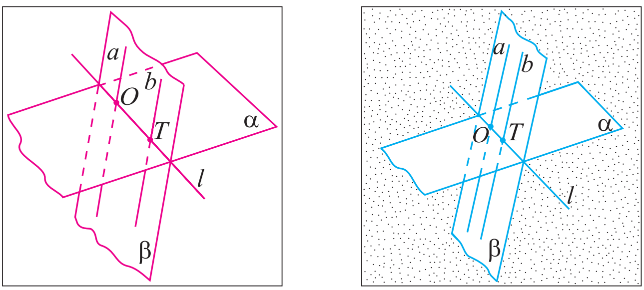
Рыс. 68

2. *Дакажам адзінасць прамой.*

Няхай існуе яшчэ адна прамая l_1, якая праходзіць праз пункт A і паралельная прамой b. Тады прамая l_1 павінна ляжаць у адной плоскасці з пунктам A і прамой b, г. зн. у плоскасці α. З курса планіметрыі вядома, што ў плоскасці α праз пункт A праходзіць адзіная прамая, паралельная прамой b. Значыць, прамая l_1 супадае з прамой l.

Тэарэма даказана.

Т э а р э м а 2. ***Калі адна з дзвюх паралельных прамых перасякае дадзеную плоскасць, то і другая прамая перасякае гэту плоскасць.***



а) б)

Рыс. 69

Д о к а з.

Няхай a і b — паралельныя прамыя і прамая a перасякае плоскасць α у пункце O. Дакажам, што прамая b таксама перасякае плоскасць α (рыс. 69, *а*, *б*).

Разгледзім плоскасць β, у якой ляжаць паралельныя прамыя a і b. Плоскасці α і β маюць агульны пункт O, значыць, яны перасякаюцца па некаторай прамой l.

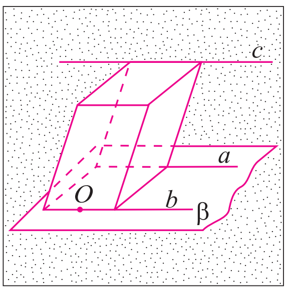
Прамая l ляжыць у плоскасці β і перасякае прамую a ў пункце O, значыць, яна перасякае і прамую b, паралельную прамой a, у некаторым пункце T. Паколькі прамая l ляжыць у плоскасці α, то пункт T ёсць агульны пункт прамой b і плоскасці α.

Прамая b не мае з плоскасцю α іншых пунктаў, акрамя пункта T. Сапраўды, калі б прамая b мела яшчэ адзін агульны пункт з плоскасцю α, то яна ляжала б у плоскасці α, а значыць, была б агульнай прамой плоскасцей α і β, г. зн. супадала б з прамой l, што супярэчыць паралельнасці прамых a і b.

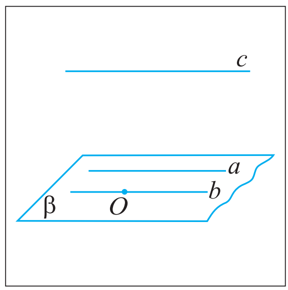
Такім чынам, прамая b мае з плоскасцю α адзіны агульны пункт T, г. зн. перасякаецца з плоскасцю α у пункце T.

Тэарэма даказана.

Тэарэма 3 (*прымета паралельнасці прамых*). ***Калі дзве прамыя паралельныя трэцяй прамой, то яны паралельныя паміж сабой.***



а)



б)

Рыс. 70

Доказ.

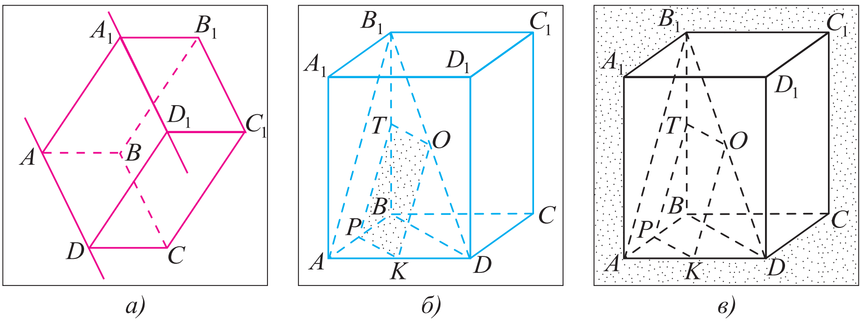
Няхай $a \parallel c$, $b \parallel c$ (рыс. 70 *а*, *б*). Дакажам, што $a \parallel b$. Для гэтага неабходна даказаць, што прамыя a і b ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца.

Няхай O — некаторы пункт на прамой b. Абазначым літарай β плоскасць, якая праходзіць праз прамую a і пункт O. Дакажам, што прамая b ляжыць у плоскасці β. Дапусцім, што прамая b перасякае плоскасць β, тады па тэарэме **2** прамая c таксама перасякае плоскасць β. Паколькі $c \parallel a$, то і прамая a па тэарэме **2** перасякае плоскасць β, а гэта супярэчыць таму, што прамая a ляжыць у плоскасці β.

Прамыя a і b не перасякаюцца, паколькі ў адваротным выпадку праз пункт іх перасячэння праходзілі б дзве прамыя a і b, паралельныя прамой c, што супярэчыць тэарэме **1**.

Тэарэма даказана.

Напрыклад, няхай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед (рыс. 71, *а*). Тады прамыя AD і B_1C_1 паралельныя. Сапраўды, паколькі чатырохвугольнік AA_1D_1D — паралелаграм, то $AD \parallel A_1D_1$. Аналагічна $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, паколькі $A_1B_1C_1D_1$ — паралелаграм. Тады па прымеце паралельнасці прамых $AD \parallel B_1C_1$.



Рыс. 71

Задача. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з'яўляецца квадрат, даўжыня стараны якога 1 см, а даўжыня бакавога канта паралелепіпеда роўна 3 см. Пункты P, T, O і K з'яўляюцца сярэдзінамі адрэзкаў AB, BB_1, B_1D і AD адпаведна. Вылічыце перыметр чатырохвугольніка $PTOK$ (рыс. 71, *б*, *в*).

Рашэнне.

1) У трохвугольніку B_1BD адрэзак TO ёсць сярэдняя лінія, значыць, $TO \parallel BD$, $TO = \frac{1}{2}BD$.

2) У трохвугольніку ABD адрэзак PK — сярэдняя лінія, значыць, $PK \parallel BD$, $PK = \frac{1}{2}BD$.

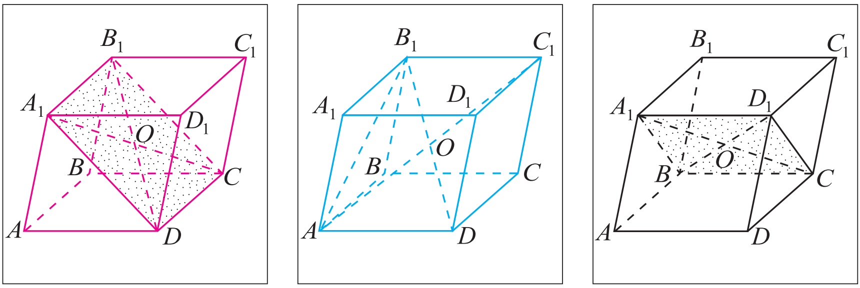
3) З 1) і 2) вынікае, што $PK \parallel TO$, $PK = TO$, г. зн. $PTOK$ — паралелаграм.

4) Цяпер вылічым перыметр чатырохвугольніка: $P_{PTOK} =$ $= 2PT + 2PK = AB_1 + BD$, $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{10}$ (см), $BD =$

$= \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2}$ (см). Такім чынам, $P_{PTOK} = \sqrt{10} + \sqrt{2} =$ $= \sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$ (см).

Адказ: $\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$ см.

Тэарэма 4 (*аб пункце перасячэння дыяганалей паралелепіпеда*). ***Дыяганалі паралелепіпеда перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца гэтым пунктам папалам.***



а) *б)* *в)*

Рыс. 72

Доказ.

1) Няхай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед. Разгледзім чатырохвугольнік A_1B_1CD, дыяганалі якога A_1C і B_1C з'яўляюцца дыяганалямі дадзенага паралелепіпеда (рыс. 72, *а*). Паколькі AA_1B_1B — паралелаграм, то $AB = A_1B_1$, $AB \parallel A_1B_1$; паколькі чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм, то $AB = CD$, $AB \parallel CD$. Значыць, $A_1B_1 = CD$, $A_1B_1 \parallel CD$, г. зн. чатырохвугольнік A_1B_1CD — паралелаграм. Таму яго дыяганалі A_1C і B_1D перасякаюцца ў некаторым пункце O і гэтым пунктам дзеляцца папалам.

2) Разгледзім чатырохвугольнік B_1C_1DA. Ён таксама з'яўляецца паралелаграмам, паколькі $B_1C_1 = AD$ і $B_1C_1 \parallel AD$. Значыць, яго дыяганалі B_1D і C_1A перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам. Сярэдзінай дыяганалі B_1D з'яўляецца пункт O, значыць, дыяганалі A_1C, B_1D і C_1A паралелепіпеда перасякаюцца ў пункце O і дзеляцца ім папалам (рыс. 72, *б*).

3) Цяпер разгледзім чатырохвугольнік A_1D_1CB. Гэты чатырохвугольнік з'яўляецца паралелаграмам, паколькі $BC = A_1D_1$, $BC \parallel A_1D_1$. Значыць, яго дыяганалі A_1C і D_1B, якія

з'яўляюцца дыяганалямі паралелепіпеда, перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам. Сярэдзінай дыяганалі A_1C з'яўляецца пункт O, значыць, і дыяганаль D_1B паралелепіпеда праходзіць праз пункт O і дзеліцца гэтым пунктам папалам (рыс. 72, *в*).

Пытанні і задачы да § 1

166. Ці правільнае сцверджанне, што прамыя ў прасторы паралельныя, калі яны не перасякаюцца?

167. Ці правільнае сцверджанне, што паралельныя прамыя ў прасторы ляжаць у адной плоскасці?

168. Ці правільна, што праз пункт, які не ляжыць на прамой, праходзіць адзіная прамая, паралельная дадзенай прамой?

169. Адна з паралельных прамых перасякае плоскасць α. Як размешчана другая прамая адносна плоскасці α?

170. Ці правільнае сцверджанне, што ў прасторы прамая, якая перасякае адну з дзвюх паралельных прамых, перасякае і другую?

171. Дзве прамыя a і b паралельныя трэцяй прамой. Што можна сказаць аб узаемным размяшчэнні прамых a і b?

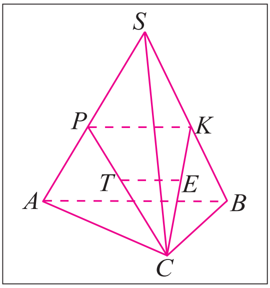
172. Прамыя a і b у прасторы паралельныя паміж сабой, а прамая c не перасякае прамую a. Ці правільнае сцверджанне, што прамыя b і c паралельныя?

173. Якую ўласцівасць мае пункт перасячэння дыяганалей паралелепіпеда?

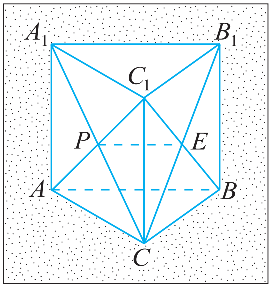
174. На рысунку 73 паказаны відарыс трохвугольнай піраміды $SABC$. Пункты P і K — сярэдзіны кантаў SA і SB адпаведна. Адрэзак TE — сярэдняя лінія трохвугольніка CPK. а) Патлумачце, чаму прамыя PK і AB паралельныя. б) Ці правільна, што прамыя TE і AB паралельныя?

175. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, пункты O і E — пункты перасячэння дыяганалей яго граней $A_1B_1C_1D_1$ і AA_1D_1D адпаведна. Дакажыце, што прамыя OE і TK паралельныя, пункты T і K — сярэдзіны кантаў CC_1 і CD адпаведна.

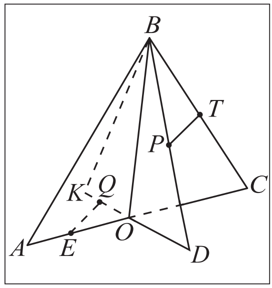
176. $ABCA_1B_1C_1$ — правільная трохвугольная прызма, даўжыня кожнага канта якой роўна 1 см. Дыяганалі граней AA_1C_1C і CC_1B_1B перасякаюцца ў пунктах P і E адпаведна (рыс. 74). а) Ці правільна, што $PE \parallel AB$? б) Вылічыце перыметр чатырохвугольніка PA_1B_1E.



Рыс. 73



Рыс. 74



Рыс. 75

177. Два трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ маюць агульную сярэднюю лінію FT, $F = AB \cap A_1B_1$, $T = BC \cap B_1C_1$. Ці перасякаюцца прамыя AC і A_1C_1?

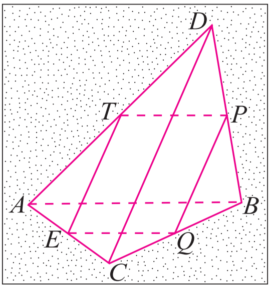
178. На рысунку 75 паказаны відарысы двух трохвугольнікаў ABC і KBD, якія маюць агульную медыяну BO. Пункты T і P ёсць сярэдзіны адрэзкаў BC і BD адпаведна, а пункты Q і E — сярэдзіны адрэзкаў OK і OA адпаведна. а) Дакажыце, што прамая PT паралельная прамой DC. б) Ці правільна, што прамыя TP і QE паралельныя?

179. Два паралелаграмы $ABCD$ і $ABTE$ не ляжаць у адной плоскасці. Дакажыце, што чатырохвугольнік $CDTE$ — паралелаграм.

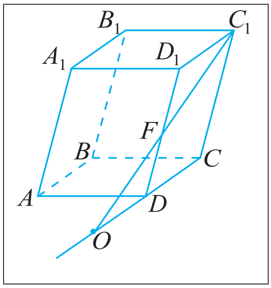
180. $DABC$ — трохвугольная піраміда (рыс. 76). Пункты T, P, Q і E — сярэдзіны кантаў AD, BD, CB і CA адпаведна. а) Дакажыце, што чатырохвугольнік $TPQE$ — паралелаграм. б) Вылічыце перыметр чатырохвугольніка $TPQE$, калі $CD = 6$ см, $AB = 7$ см.

181. $ABCD$ — трапецыя ($BC \parallel DA$). Вяршыні A і B трапецыі ляжаць у плоскасці α, а дзве іншыя вяршыні не належаць плоскасці α. Вылічыце адлегласць ад пункта A да пункта перасячэння прамой CD з плоскасцю α, калі $AD = 16$ см, $AB = 9$ см, $BC = 12$ см.

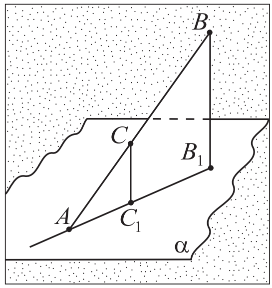
182. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед. Пункт O ляжыць на прадаўжэнні канта DC (рыс. 77). Вылічыце адлегласць ад пункта D да пункта перасячэння прамой C_1O з плоскасцю A_1AD, калі $CC_1 = 8$ см, $BC = 4$ см, $OC = 6$ см.



Рыс. 76



Рыс. 77



Рыс. 78

183. Плоскасць α і адрэзак AB маюць адзін агульны пункт A. Праз пункт B і сярэдзіну C адрэзка AB праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць α у пунктах B_1 і C_1 адпаведна. Вылічыце даўжыню адрэзка BB_1, калі $CC_1 = 10$ см.

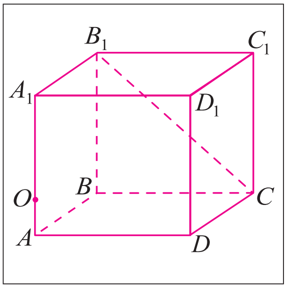
184. Праз канец A адрэзка AB праходзіць плоскасць α. Праз пункт B і пункт C гэтага адрэзка праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць α у пунктах B_1 і C_1 адпаведна. Вылічыце даўжыню адрэзка CC_1, калі $BB_1 = 8$ см і $AC : CB = 3 : 5$ (рыс. 78).

185. Адрэзак AB не перасякае плоскасць α. Пункт C належыць адрэзку AB. Праз пункты A, B, C праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць α у пунктах A_1, B_1, C_1 адпаведна. Дакажыце, што пункты A_1, B_1, C_1 ляжаць на адной прамой, і вылічыце даўжыню адрэзка CC_1, калі $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 5$ см, $AC : BC = 1 : 3$.

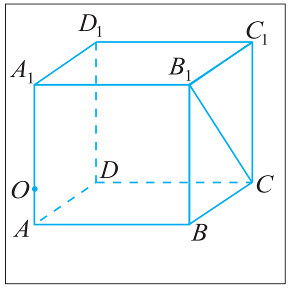
186. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Пункт O ляжыць на канце AA_1 (рыс. 79, *а*, *б*). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце пункт перасячэння прамой l, якая праходзіць праз пункт O і паралельная прамой B_1C, з плоскасцю D_1C_1C.

187. $SABC$ — трохвугольная піраміда. Пункт O ляжыць на канце SA так, што $SO : OA = 2 : 5$. Праз пункт O праведзе-

на прамая l, паралельная медыяне SK грані SBC. Вылічыце даўжыню медыяны SK, калі даўжыня адрэзка прамой l, размешчанага ўнутры піраміды, роўна 7 см.



а)



б)

Рыс. 79

188. Плоскасць α праходзіць праз вяршыні B і C трохвугольніка ABC, а вяршыня A не ляжыць у плоскасці α. Прамая a паралельная прамой AC і перасякае старану AB у пункце F так, што $AF : FB = 2 : 3$. а) Дакажыце, што прамая a перасякае плоскасць α. б) Вылічыце адлегласць ад пункта F да пункта перасячэння прамой a з плоскасцю α, калі $AC = 3$ см.

189. У тэтраэдры $SABC$ пункт P ляжыць на канце AB так, што $AP : PB = 1 : 3$. Прамая a праходзіць праз пункт P, яна паралельная медыяне AE бакавой грані SAC і перасякае паверхню тэтраэдра ў пункце T. Вылічыце даўжыню канта тэтраэдра, калі $PT = 4$ см.

190. $SABCD$ — тэтраэдр. Праз пункт перасячэння медыян грані ABC праведзена прамая l, паралельная прамой AS. Знайдзіце плошчу трохвугольніка BKS (пункт K — сярэдзіна канта AS), калі даўжыня адрэзка прамой l, размешчанага ўнутры тэтраэдра, роўна a.

191. Паралелаграм $ABCD$ і трохвугольнік BTC не ляжаць у адной плоскасці. Прамая a праходзіць праз пункт O, які ляжыць на прамой TC, і паралельная прамой BC. Дакажыце, што прамыя AD і a паралельныя.

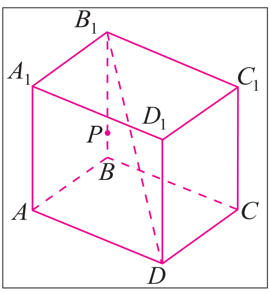
192. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда. Пункт O ляжыць на прамой SD. Прамая l праходзіць

праз пункт O і паралельная прамой DC. Дакажыце, што прамыя AB і a паралельныя.

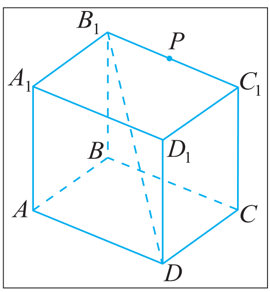
193. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Пункт P ляжыць: а) на канце BB_1 (рыс. 80, *а*); б) на канце B_1C_1 (рыс. 80, *б*). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце пункт перасячэння прамой l, якая праходзіць праз пункт P і паралельная прамой B_1D, з паверхняй куба.

194. $SABC$ — тэтраэдр, даўжыня канта якога a. Пункт O — сярэдзіна канта SB. Пабудуйце пункт перасячэння прамой l, якая праходзіць праз пункт O і паралельная медыяне BT грані ABC, з паверхняй тэтраэдра. Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, размешчанага ўнутры тэтраэдра.

195. $ABCA_1B_1C_1$ — правільная трохвугольная прызма, усе канты якой роўныя паміж сабой. Пункт O — сярэдзіна дыяганалі AC_1 грані AA_1C_1C. Пабудуйце пункт перасячэння прамой l, якая праходзіць праз пункт O і паралельная медыяне C_1K грані $A_1B_1C_1$, з гранню AA_1B_1B. Вылічыце плошчу бакавой паверхні прызмы, калі даўжыня адрэзка прамой l, размешчанага ўнутры прызмы, роўна 1 см (рыс. 81).

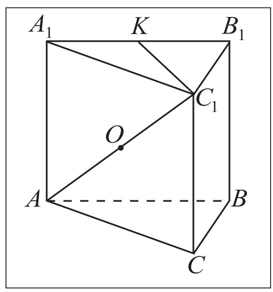


а)



б)

Рыс. 80



Рыс. 81

196. У правільнай трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ усе канты роўныя паміж сабой. Пункт O — пункт перасячэння медыян грані ABC. Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры прызмы адрэзка прамой, якая праходзіць праз сярэдзіну адрэзка A_1O і паралельная прамой CO, калі плошча яе бакавой паверхні роўна S.

197. $TABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, бакавы кант якой у два разы большы за старану асновы, а плошча бакавой паверхні роўна S. Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры піраміды адрэзка прамой, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей асновы і паралельная медыяне TF грані TDC.

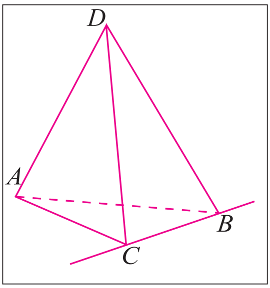
198. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $TABCD$ усе канты роўныя паміж сабой. Пункт E — сярэдзіна канта TA. Праз пункт E праведзена прамая l, паралельная прамой KP, дзе K і P — сярэдзіны кантаў TD і TC адпаведна. Пабудуйце пункт F — пункт перасячэння прамой l з плоскасцю TBC. Знайдзіце плошчу асновы піраміды, калі плошча чатырохвугольніка $EFCD$ роўна S.

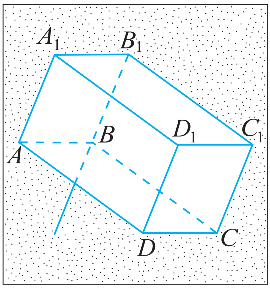
199. $SABCD$ — трохвугольная піраміда. Праз пункт перасячэння медыян грані SBD праведзена прамая, паралельная медыяне BM грані SAB. Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, які ляжыць унутры піраміды, калі $BM = a$.

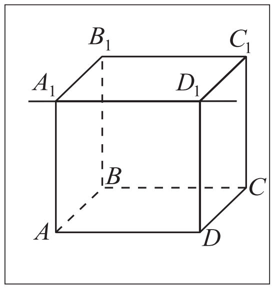
§ 2. Паралельнасць прамой і плоскасці

1. Паралельнасць прамой і плоскасці. Магчымы тры выпадкі ўзаемнага размяшчэння прамой і плоскасці:

1) прамая ляжыць у плоскасці (кожны пункт прамой ляжыць у плоскасці). Напрыклад, калі $DABC$ — трохвугольная піраміда, то прамая CB ляжыць у плоскасці ABC (рыс. 82, *а*);







Рыс. 82

2) прамая і плоскасць перасякаюцца (маюць адзіны агульны пункт). Напрыклад, прамая B_1B перасякаецца з плоскасцю грані $ABCD$ паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 82, *б*);

3) прамая і плоскасць не маюць ні аднаго агульнага пункта. Напрыклад, калі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то прамая A_1D_1 і плоскасць, у якой ляжыць грань $ABCD$, не перасякаюцца (рыс. 82, *в*).

Азначэнне. **Прамая і плоскасць называюцца паралельнымі, калі яны не маюць агульных пунктаў.**

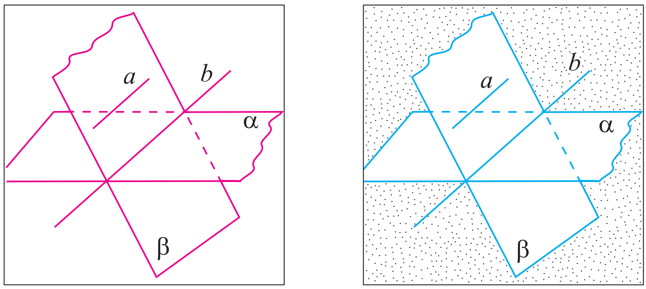
Калі прамая a паралельная плоскасці α, то пішуць $a \parallel \alpha$. Чытаюць: «Прамая a паралельная плоскасці α».

Адрэзак (прамень) называецца паралельным плоскасці, калі ён ляжыць на прамой, паралельнай дадзенай плоскасці.

Нагляднае ўяўленне аб прамой, паралельнай плоскасці, дае лінія перасячэння сцяны і столі ў пакоі. Гэта лінія паралельная плоскасці падлогі.

2. Прымета паралельнасці прамой і плоскасці. Дакажам прымету паралельнасці прамой і плоскасці.

Тэарэма 1 (*прымета паралельнасці прамой і плоскасці*). ***Калі прамая, якая не ляжыць у дадзенай плоскасці, паралельная якой-небудзь прамой, якая ляжыць у гэтай плоскасці, то яна паралельная дадзенай плоскасці.***



а) *б)*

Рыс. 83

Доказ.

Няхай прамая a не ляжыць у плоскасці α, а прамая b ляжыць у гэтай плоскасці і $a \parallel b$. Дакажам, што прамая a паралельная плоскасці α (рыс. 83, *а*, *б*).

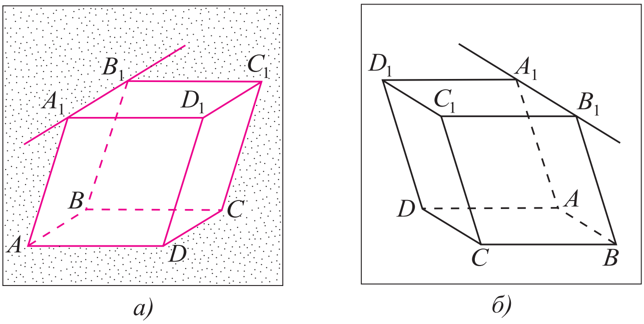
Будзем меркаваць, што прамая a перасякае плоскасць у некаторым пункце X. Пункт X ляжыць у плоскасці α і ў плоскасці β, якая праходзіць праз паралельныя прамыя a і b. Значыць, ён ляжыць на прамой b, па якой перасякаюцца плоскасці α і β, што супярэчыць умове тэарэмы ($a \parallel b$).

Такім чынам, меркаванне няправільнае і прамая a не перасякае плоскасць α. Па ўмове яна не ляжыць у плоскасці α, значыць, $a \parallel \alpha$.

Тэарэма даказана.

Напрыклад, на рысунку 84, *а*, *б* ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед) прамая A_1B_1 паралельная плоскасці α, у якой ляжыць грань $ABCD$. Сапраўды, прамая A_1B_1 паралельная прамой AB, якая ляжыць у плоскасці α. Значыць, па прымеце паралельнасці прамой і плоскасці $A_1B_1 \parallel \alpha$.

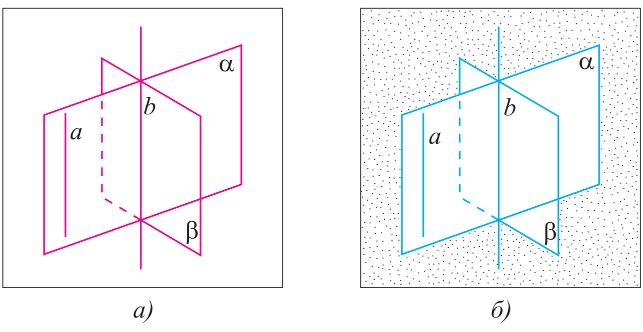
Тэарэма 2. ***Калі плоскасць праходзіць праз прамую, паралельную другой плоскасці, і перасякае гэту плоскасць, то лінія перасячэння плоскасцей паралельная дадзенай прамой.***



Рыс. 84

Доказ.

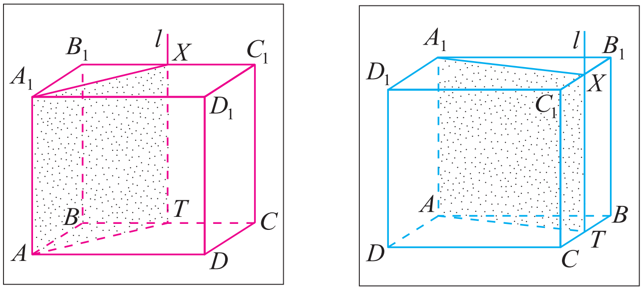
Няхай плоскасць α праходзіць праз прамую a, паралельную плоскасці β, а плоскасці α і β перасякаюцца па прамой b. Дакажам, што $a \parallel b$. Прамыя a і b ляжаць у адной плоскасці α. Акрамя таго, яны не перасякаюцца. Сапраўды, калі б прамыя a і b перасякаліся ў некаторым пункце X, то прамая a перасякала б плоскасць β у пункце X, што супярэчыць умове. Такім чынам, прамыя a і b паралельныя (рыс. 85, *а*, *б*).



Рыс. 85

Праілюструем магчымасць прымянення тэарэмы пры рашэнні задач.

Задача 1. Дадзены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю α, якая праходзіць праз прамую AA_1 і пункт T, што належыць канту BC.



а) б)

Рыс. 86

Р а ш э н н е.

1) Плоскасць α перасякае грань $ABCD$ па адрэзку AT (рыс. 86, *а*, *б*).

2) Прамая AA_1 паралельна прамой BB_1, якая ляжыць у плоскасці грані BCC_1B_1, значыць, плоскасць α перасякае плоскасць грані BCC_1B_1 па прамой l, паралельнай прамой BB_1. Адзначым пункт $X = l \cap B_1C_1$.

3) Плоскасць α перасякае грані BCC_1B_1 і $C_1B_1A_1D_1$ па адрэзках XT і XA_1 адпаведна. Чатырохвугольнік TXA_1A — шуканае сячэнне.

Задача 2. Прамая a паралельная плоскасці α. Пункт O ляжыць у плоскасці α. Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз пункт O і паралельная прамой a, ляжыць у плоскасці α.

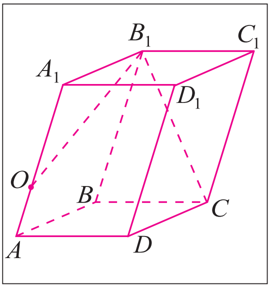
Д о к а з.

Няхай прамая b праходзіць праз пункт O і паралельная прамой a. Будзем меркаваць, што прамая b не ляжыць у плоскасці α, г. зн. перасякае плоскасць α у пункце O. Тады прамая a таксама перасякае плоскасць α (гл. **2**, § **1**, тэарэма **4**), што супярэчыць умове. Значыць, прамая b ляжыць у плоскасці α.

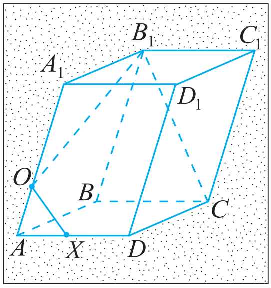
Задача 3. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскасцю α, якая праходзіць праз прамую B_1C і пункт O, што ляжыць на канце AA_1.

Р а ш э н н е.

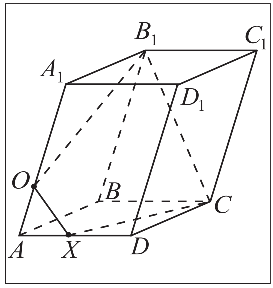
1) Плоскасць α перасякае грані AA_1B_1B і BB_1C_1C па адрэзках OB_1 і B_1C адпаведна (рыс. 87, *а*).



а)



б)



в)

Рыс. 87

2) Чатырохвугольнік A_1B_1CD з'яўляецца паралелаграмам (паколькі $A_1B_1 \parallel DC$, $A_1B_1 = DC$), значыць, $B_1C \parallel A_1D$. Па прымеце паралельнасці прамой і плоскасці прамая B_1C паралельная плоскасці, у якой ляжыць грань AA_1D_1D.

3) Сякучая плоскасць α перасякае плоскасць грані AA_1D_1D па прамой l, якая праходзіць праз пункт O і паралельная прамой B_1C. Адзначым пункт $X = l \cap AD$ ($O \in l$, $l \parallel A_1D$) (рыс. 87, *б*).

4) Плоскасць α перасякае грані AA_1D_1D і $ABCD$ па адрэзках XO і XC (рыс. 87, *в*). Чатырохвугольнік OB_1CX — шуканае сячэнне.

Пытанні і задачы да § 2

200. Ці правільнае сцверджанне, што прамая, паралельная некаторай прамой, якая ляжыць у плоскасці, паралельная гэтай плоскасці?

201. Ці правільнае сцверджанне, што прамая, паралельная плоскасці, паралельная любой прамой, якая ляжыць у гэтай плоскасці?

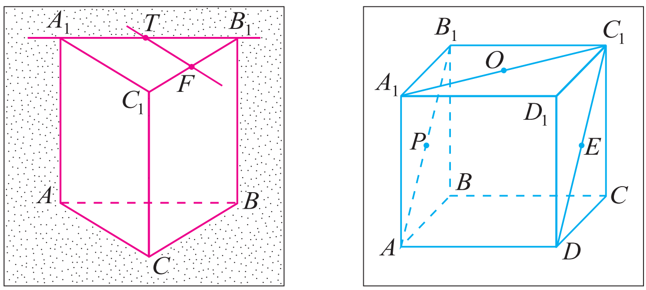
202. Ці правільнае сцверджанне, што дзве прамыя, кожная з якіх паралельная некаторай плоскасці, паралельныя паміж сабой?

203. Прамая a паралельная плоскасці β. Ці правільна, што прамая a не перасякае любую прамую плоскасці β?

204. Прамая l паралельная плоскасці α. Ці правільнае сцверджанне, што ў плоскасці α існуе прамая, паралельная прамой l?

205. Ці можна дзве плоскасці, што перасякаюцца, перасячы трэцяй плоскасцю па дзвюх паралельных прамых?

206. $ABCA_1B_1C_1$ — прамая трохвугольная прызма, пункты T і F — сярэдзіны кантаў A_1B_1 і C_1B_1 адпаведна (рыс. 88, *а*). а) Ці правільна, што прамая A_1B_1 паралельная плоскасці ABC? б) Дакажыце, што прамая TF паралельная плоскасці ABC. в) Назавіце якую-небудзь плоскасць, якой паралельная прамая CC_1.



а) *б)*

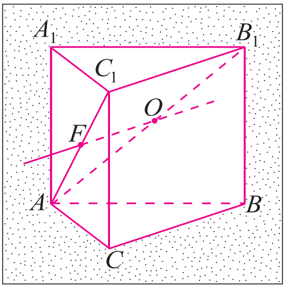
Рыс. 88

207. $DABC$ — трохвугольная піраміда, пункт F — сярэдзіна канта DB. Якім чынам павінен быць размешчаны на канце CB пункт T, каб прамая FT была паралельная плоскасці DCA?

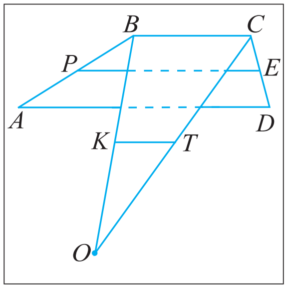
208. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Пункты P, O і E — сярэдзіны адрэзкаў AB_1, A_1C_1 і C_1D адпаведна (рыс. 88, *б*). а) Ці правільна, што прамая PO паралельная плоскасці, у якой ляжыць грань AA_1D_1D? б) Дакажыце, што прамая OE паралельная плоскасці B_1BC.

209. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пункты O і E — сярэдзіны адрэзкаў AB_1 і AC адпаведна. а) Дакажыце, што адрэзак OE паралельны плоскасці, у якой ляжыць грань BCC_1B_1. б) Вылічыце даўжыню адрэзка OE, калі $AD = 3$ см, $DD_1 = 4$ см.

210. $ABCA_1B_1C_1$ — прамая трохвугольная прызма, пункты O і F — сярэдзіны адрэзкаў AB_1 і AC_1 адпаведна (рыс. 89, *а*). а) Ці правільна, што прамая FO паралельная плоскасці $A_1B_1C_1$? б) Дакажыце, што прамая FO паралельная плоскасці ABC.



а)



б)

Рыс. 89

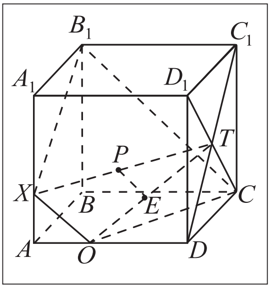
211. $ABCD$ — трапецыя. Плоскасць α праходзіць праз вяршыні A, D і не праходзіць праз вяршыню C. Пункт O ляжыць у плоскасці α (рыс. 89, *б*). а) Дакажыце, што сярэдняя лінія PE трапецыі паралельная плоскасці α. б) Ці правільна, што сярэдняя лінія KT трохвугольніка BOC паралельная плоскасці α?

212. Пункт O не ляжыць у плоскасці паралелаграма $ABCD$. Дакажыце, што прамая CD паралельная плоскасці AOB.

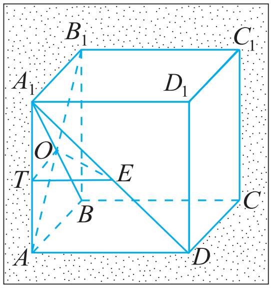
213. Чатырохвугольнік B_1COX — сячэнне паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскасцю α, якая праходзіць праз прамую B_1C, і пункт $O \in AD$ (рыс. 90). а) Ці правільна, што прамая B_1C паралельная плоскасці XOT? б) Дакажыце, што сярэдняя лінія PE трохвугольніка XOT паралельная плоскасці α.

214. $SABC$ — правільная трохвугольная піраміда, даўжыня бакавога канта якой роўна 4 см, а аснова ёсць трохвугольнік, даўжыня стараны якога роўна 2 см. Вылічыце перыметр сячэння піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта BC і сярэднюю лінію трохвугольніка SAB, паралельную прамой AB.

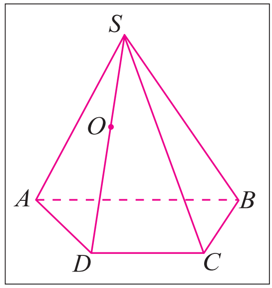
215. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Вылічыце плошчу поўнай паверхні куба, калі перыметр трохвугольніка TOE роўны $(2+\sqrt{2})$ см, дзе пункты T, O і E — сярэдзіны адрэзкаў AA_1, A_1B і A_1D адпаведна (рыс. 91).



Рыс. 90



Рыс. 91



Рыс. 92

216. Пункт O не ляжыць у плоскасці паралелаграма $ABCD$, а пункт E — сярэдзіна адрэзка BO. Дакажыце, што плоскасць AED перасякае прамую OC.

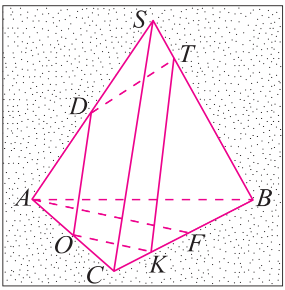
217. На рысунку 92 паказаны відарыс чатырохвугольнай піраміды, аснова якой — трапецыя $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт $O \in SD$ і прамую AB. Якая фігура атрымаецца ў сячэнні?

218. Даўжыня стараны асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўна 20 см, а даўжыня бакавога канта — 26 см. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны двух процілеглых старон асновы і паралельная якому-небудзь бакавому канту. Вылічыце плошчу сячэння.

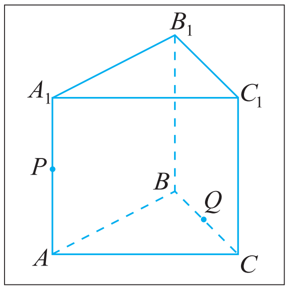
219. На рысунку 93 паказаны відарыс правільнай трохвугольнай піраміды $SABC$. Чатырохвугольнік $DOKT$ — сячэнне піраміды плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны кантаў AS, AC і паралельная прамой, на якой ляжыць медыяна AF грані ABC. Вылічыце даўжыні адрэзкаў OD і KT, калі $SB = 12$ см.

220. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, даўжыня кожнага канта якой роўна a. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыню S, сярэдзіну канта CD і паралельная дыяганалі AC асновы. Знайдзіце плошчу гэтага сячэння.

221. $ABCA_1B_1C_1$ — правільная трохвугольная прызма, даўжыня кожнага канта якой роўна a. Пункты P і Q — сярэдзіны кантаў AA_1 і BC адпаведна (рыс. 94). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз пункты P, Q і паралельная прамой AC. Знайдзіце перыметр гэтага сячэння.



Рыс. 93



Рыс. 94

222. $SABCD$ — чатырохвугольная піраміда, асновай якой з'яўляецца трапецыя $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Пункт O — сярэдзіна канта SA. Вылічыце даўжыню адрэзка, па якім плоскасць OBC перасякае грань SAD, калі $BC = 6$ см, а даўжыня сярэдняй лініі трапецыі роўна 8 см.

223. $DABC$ — тэтраэдр. Пункты T, K і E — сярэдзіны кантаў DB, DC і AC адпаведна. Вылічыце перыметр сячэння тэтраэдра плоскасцю TKE, калі плошча грані тэтраэдра роўна $16\sqrt{3}$ см^2.

224. У трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ пункты O, K і T — сярэдзіны кантаў DB, DC і AC адпаведна. Пабудуйце пункт P, у якім плоскасць OKT перасякае кант AB. Дакажыце, што адрэзкі KP і OT перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

225. $SABCD$ — чатырохвугольная піраміда, аснова якой — паралелаграм. Пункты T, K і E — сярэдзіны кантаў AB, AD і SC адпаведна. Пабудуйце адрэзак, па якім плоскасць TKE перасякае дыяганальнае сячэнне SBD піраміды.

226. Аснова чатырохвугольнай піраміды $SABCD$ — трапецыя $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Пункт E — сярэдзіна канта SD. Пабудуйце пункт T, у якім плоскасць BCE перасякае прамую SA. Дакажыце, што адрэзкі TC і BE перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, калі сярэдняя лінія трапецыі $ABCD$ роўна $\frac{3}{2}$ BC.

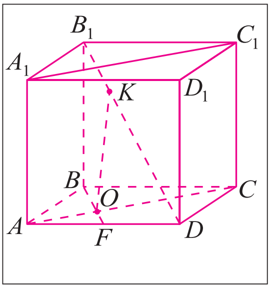
227. Аснова піраміды $SABCD$ — трапецыя $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Пункты K і E — сярэдзіны дыяганалей AC і BD асновы, а пункт O — сярэдзіна канта SB. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункты O, K і E. Якая фігура атрымліваецца ў сячэнні?

228. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $SABC$ пункт O — цэнтр асновы ABC, а пункт D дзеліць кант SC на адрэзкі $SD = \frac{5}{3}$ см і $DC = \frac{10}{3}$ см. Дакажыце, што прамая OD паралельная плоскасці ASB, і вылічыце даўжыню адрэзка OD, калі $AB = 6$ см.

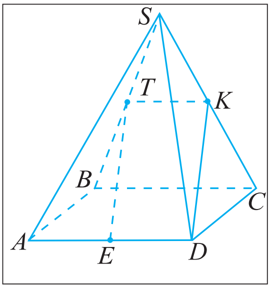
229. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Пункт F — сярэдзіна канта AD, а пункт K ляжыць на дыяганалі куба B_1D так, што $B_1K : B_1D = 1 : 3$. Дакажыце, што прамая OK паралельная плоскасці грані AA_1B_1B, дзе пункт O — пункт перасячэння адрэзкаў AC і BF (рыс. 95).

230. Праз вяршыню прамога вугла C прамавугольнага трохвугольніка ABC праведзена плоскасць α, паралельная гіпатэнузе AB. Бісектрыса вугла A перасякае плоскасць α у пункце O. Вылічыце даўжыню адрэзка CO, калі $AB = 5$ см, $BC = 4$ см.

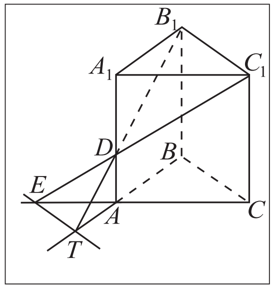
231. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, пункты E, T і K — сярэдзіны кантаў AD, SB і SC адпаведна (рыс. 96). Ці правільна, што адрэзкі ET і DK роўныя і паралельныя? Абгрунтуйце адказ.



Рыс. 95



Рыс. 96



Рыс. 97

232. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, пункты T, K і E — сярэдзіны адрэзкаў B_1B, B_1A і B_1D адпаведна. Вылічыце плошчу сячэння піраміды B_1ABCD плоскасцю TKE, калі плошча паверхні куба роўна 24 см^2.

233. Пабудуйце сячэнне тэтраэдра $SABC$ плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны кантаў AB, SC і паралельная канту SB. Знайдзіце перыметр сячэння, калі даўжыня канта тэтраэдра роўна a.

234. У правільнай трохвугольнай прызме $ABC_1B_1C_1$ праз вяршыні B_1, C_1 і пункт D на канце AA_1 ($AD : DA_1 = 2 : 3$) праведзены прамыя, што перасякаюць плоскасць асновы ў пунктах T і E (рыс. 97). Вылічыце даўжыню адрэзка TE, калі $AB = 9$ см.

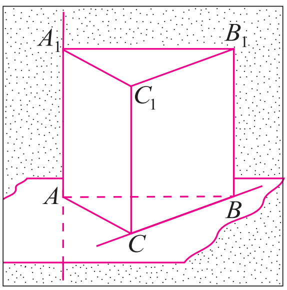
235. У тэтраэдры $SABC$ пункты T і K — сярэдзіны кантаў AB і SB. Вылічыце даўжыню адрэзка, па якім перасякаюцца сячэнні тэтраэдра плоскасцямі, што праходзяць праз прамыя ST і BK і паралельныя прамой AC, калі $AB = 12$ см.

236. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $SABC$ пункты E і D — сярэдзіны кантаў SA і SB адпаведна. Праз сярэдзіну O адрэзка CE праведзена прамая, якая паралельная прамой AD і перасякае паверхню піраміды ў пункце T. Пабудуйце пункт T і вылічыце даўжыню адрэзка OT, калі $CE = 8$ см.

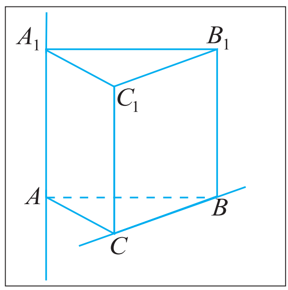
§ 3. Скрыжаваныя прамыя

1. Скрыжаваныя прамыя. Калі дзве розныя прамыя ляжаць у адной плоскасці, то яны або перасякаюцца, або паралельныя. У прасторы магчымы і трэці выпадак, калі не існуе плоскасці, у якой ляжаць дзве прамыя.

Напрыклад, калі $ABCA_1B_1C_1$ — прамая трохвугольная прызма (рыс. 98, *а*, *б*), то прамыя AA_1 і CB не паралельныя і не перасякаюцца.



а)



б)

Рыс. 98

А з н а ч э н н е. **Дзве прамыя называюцца скрыжаванымі, калі не існуе плоскасці, у якой яны абедзве ляжаць.**

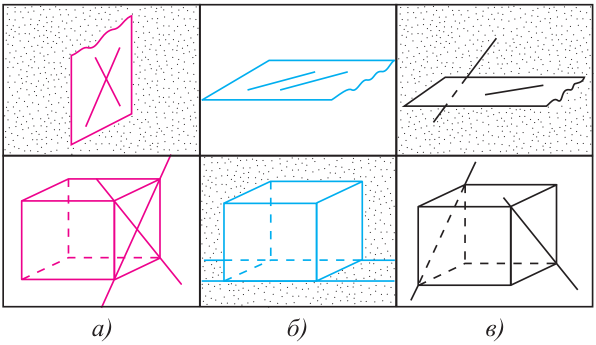
Магчымы тры выпадкі ўзаемнага размяшчэння дзвюх прамых у прасторы:

1) *прамыя перасякаюцца* (маюць адзін агульны пункт) (рыс. 99, *а*);

2) *прамыя паралельныя* (ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца) (рыс. 99, *б*);

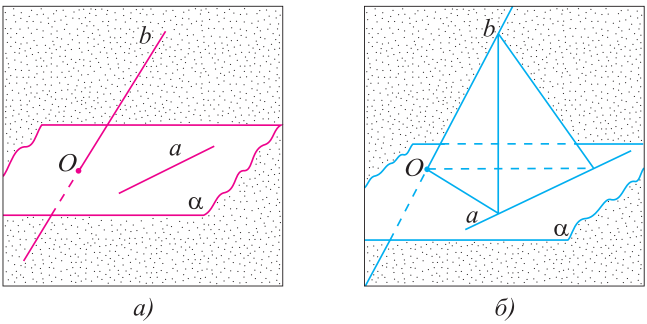
3) *прамыя скрыжаваныя* (не існуе плоскасці, у якой яны абедзве ляжаць) (рыс. 99, *в*).

2. Прымета скрыжаваных прамых. Дакажам тэарэму, якая дазваляе высветліць, ці з'яўляюцца дзве прамыя скрыжаванымі.



Рыс. 99

Тэарэма 1 (*прымета скрыжаваных прамых*). ***Калі адна з дзвюх прамых ляжыць у некаторай плоскасці, а другая прамая перасякае гэту плоскасць у пункце, які не належыць першай прамой, то гэтыя прамыя скрыжаваныя.***



Рыс. 100

Доказ.

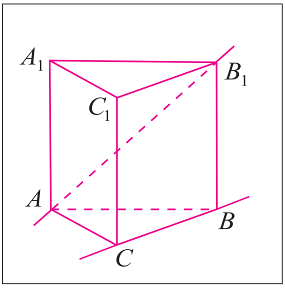
1) Няхай прамая a ляжыць у плоскасці α, а прамая b перасякае гэту плоскасць у пункце O, які не ляжыць на прамой a (рыс. 100, *а*, *б*). Дакажам, што прамыя a і b скрыжаваныя, г. зн. што не існуе плоскасці, у якой яны абедзве ляжаць.

2) Будзем меркаваць, што прамыя a і b ляжаць у некаторай плоскасці β. Тады плоскасць β праходзіць праз прамую a і пункт O, а значыць, супадае з плоскасцю α (паколькі праз прамую і пункт, які на ёй не ляжыць, праходзіць адзіная

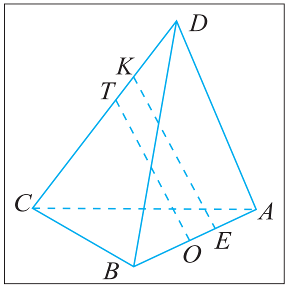
плоскасць). Атрымалі, што прамая b ляжыць у плоскасці α, а гэта супярэчыць умове тэарэмы. Такім чынам, наша меркаванне няправільнае, а значыць, прамыя a і b скрыжаваныя.

Тэарэма даказана.

Разгледзім прыклад. Няхай $ABCA_1B_1C_1$ — прамая трохвугольная прызма. Тады прамыя AB_1 і BC скрыжаваныя, паколькі прамая AB_1 перасякае плоскасць ABC у пункце A, які не ляжыць на прамой BC (рыс. 101, *а*).



а)



б)

Рыс. 101

Задача 1. Пункты T і K ляжаць на канцэ CD, а пункты O і E — на канцэ AB трохвугольнай піраміды $DABC$ (рыс. 101, *б*). Дакажыце, што прамыя TO і KE скрыжаваныя.

Доказ.

Прамая TK перасякае плоскасць ABC у пункце C, які не ляжыць на прамой OE, значыць, прамыя TK і OE скрыжаваныя. Такім чынам, пункты T, K, E і O не ляжаць у адной плоскасці. Адсюль вынікае, што прамыя TO і KE не ляжаць у адной плоскасці, г. зн. з'яўляюцца скрыжаванымі.

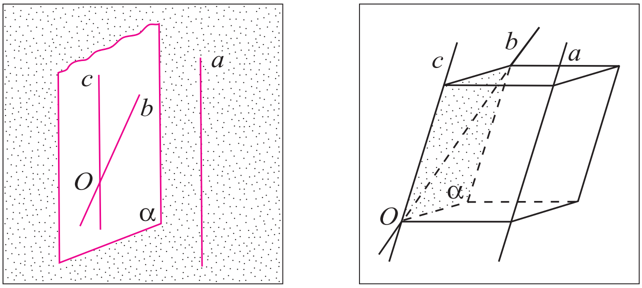
Тэарэма 2. ***Праз кожную з дзвюх скрыжаваных прамых праходзіць адзіная плоскасць, паралельная другой прамой.***

Доказ.

1. *Дакажам існаванне плоскасці.*

Няхай a і b — скрыжаваныя прамыя (рыс. 102 *а*, *б*). Дакажам, што праз прамую b праходзіць плоскасць, паралельная прамой a. Праз які-небудзь пункт O прамой b правядзём прамую c, паралельную прамой a. Няхай α —

плоскасць, якая праходзіць праз прамыя b і c. Паколькі прамая a не ляжыць у плоскасці α і паралельная прамой c, што ляжыць у гэтай плоскасці, то прамая a паралельная плоскасці α.



а) *б)*

Рыс. 102

2. *Дакажам адзінасць плоскасці.*

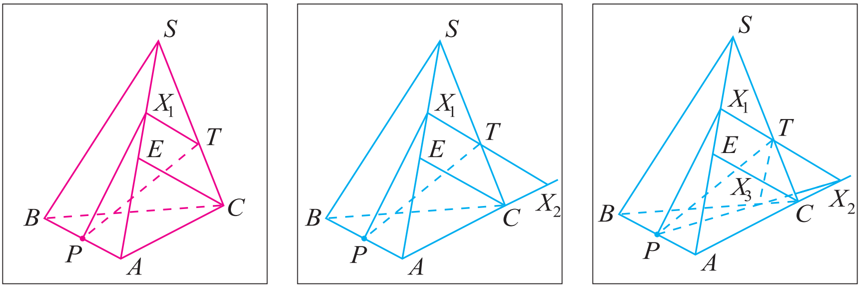
Плоскасць α — адзіная плоскасць, якая праходзіць праз прамую b і паралельная прамой a. Сапраўды, любая іншая плоскасць, якая праходзіць праз прамую b, перасякаецца з прамой c, а значыць, перасякаецца і з паралельнай ёй прамой.

Задача 2. Пункт O — сярэдзіна канта SA трохвугольнай піраміды $SABC$. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю α, якая праходзіць праз прамую OC і паралельная прамой AB.

Рашэнне.

Плоскасць α праходзіць праз пункт O, які належыць плоскасці SAB, і паралельная прамой $AB \subset (SAB)$, значыць, яна перасякае плоскасць SAB па прамой l, якая праходзіць праз пункт O і паралельная прамой AB. Будуем пункт $F = l \cap SB$, дзе $l \parallel AB$ і $O \in l$. Плоскасць α перасякае грань SAB па адрэзку OF, а грані SAC і SBC — па адрэзках OC і CF адпаведна. Трохвугольнік COF — сячэнне піраміды $SABC$ плоскасцю α (выканайце рысунак самастойна).

Задача 3. Пункты P, T і E належаць адпаведна кантам AB, SC і AS трохвугольнай піраміды $SABC$. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю α, якая праходзіць праз прамую PT і паралельная прамой EC.



а) б) в)

Рыс. 103

Рашэнне.

1) Плоскасць α праходзіць праз пункт T і паралельная прамой EC, значыць, яна перасякае плоскасць SAC па прамой, якая праходзіць праз пункт T і паралельная прамой EC. Пабудуем пункт $X_1 = l \cap SA$ ($l \parallel EC$, $T \in l$). Тады плоскасць α перасякае грань SAC па адрэзку TX_1, а грань SAB — па адрэзку X_1P (рыс. 103, *а*).

2) Будуем пункт $X_2 = X_1T \cap AC$ (пункт X_2 ляжыць у сякучай плоскасці) (рыс. 103, *б*).

3) Знаходзім пункт $X_3 = X_2P \cap BC$. Сякучая плоскасць перасякае грані ABC і SBC па адрэзках X_3P і X_3T адпаведна. Такім чынам, чатырохвугольнік X_1PX_3T — шуканае сячэнне (рыс. 103, *в*).

Пытанні і задачы да § 3

237. Прамая l ляжыць у плоскасці α, а прамая b перасякае плоскасць α у пункце A. Ці правільнае сцверджанне, што прамыя l і b скрыжаваныя?

238. Пункты A, B і C належаць плоскасці α і не ляжаць на адной прамой, пункт D не належыць плоскасці α. Колькі пар скрыжаваных прамых вызначаюць дадзеныя пункты?

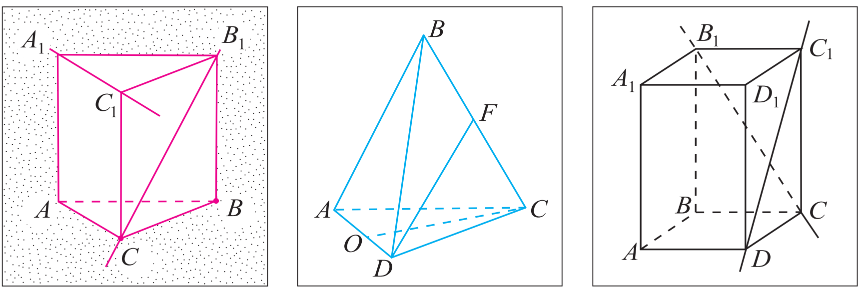
239. Ці правільнае сцверджанне, што дзве прамыя з'яўляюцца скрыжаванымі, калі яны ляжаць у розных плоскасцях?

240. $ABCA_1B_1C_1$ — прамая трохвугольная прызма (рыс. 104, *а*). а) Ці правільнае сцверджанне, што прамыя AB

і CB_1 скрыжаваныя? б) Дакажыце, што прамыя A_1C_1 і CB з'яўляюцца скрыжаванымі. в) Назавіце якую-небудзь прамую, якая з'яўляецца скрыжаванай для прамой BB_1.

241. $ABCD$ — трохвугольная піраміда, пункт F ляжыць на канце BC, $O \in AD$ (рыс. 104, *б*). а) Ці правільнае сцверджанне, што прамыя AD і BC з'яўляюцца скрыжаванымі? б) Дакажыце, што прамыя DF і AC з'яўляюцца скрыжаванымі. в) Прывядзіце прыклады прамых, якія з'яўляюцца скрыжаванымі для прамой CO.

242. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед (рыс. 104, *в*). а) Дакажыце, што прамыя DC_1 і CB_1 скрыжаваныя. б) Ці правільна, што прамыя B_1C і AD перасякаюцца? в) Ці з'яўляюцца прамыя BC і DC_1 скрыжаванымі?



а) *б)* *в)*

Рыс. 104

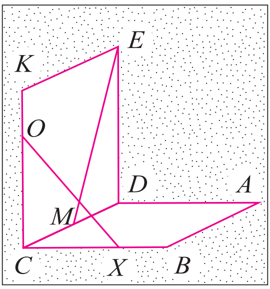
243. $ABCA_1B_1C_1$ — прамая трохвугольная прызма, пункт O ляжыць на канце CB. а) Ці правільна, што прамыя AB і C_1O скрыжаваныя? б) Дакажыце, што прамыя AC і C_1O скрыжаваныя.

244. Прамавугольнікі $ABCD$ і $CDEK$ не ляжаць у адной плоскасці, $O \in CK$, $X \in CB$ і $M \in CD$ (рыс. 105). а) Вызначыце ўзаемнае размяшчэнне прамых OX і ME. б) Ці перасякаюцца прамыя CD і OX? в) Ці правільна, што прамыя OX і KE скрыжаваныя?

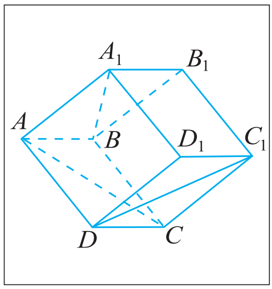
245. Пункт O не ляжыць у плоскасці паралелаграма $ABCD$, а пункт T — сярэдзіна адрэзка OB. а) Дакажыце, што прамыя OA і BD скрыжаваныя. б) Ці перасякаюцца пра-

мыя TC і BD? в) Вызначыце ўзаемнае размяшчэнне прамых AO і TC.

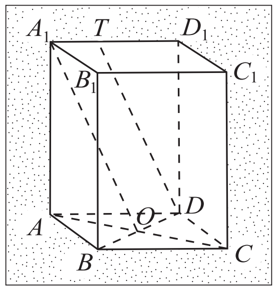
246. На рысунку 106 паказаны відарыс куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Дакажыце, што прамыя BA_1 і AC скрыжаваныя. б) Ці правільна, што прамыя BC і DC_1 перасякаюцца? в) Вызначыце ўзаемнае размяшчэнне прамых A_1B і DC_1. г) Ахарактарызуйце ўзаемнае размяшчэнне прамых A_1B і D_1C_1.



Рыс. 105



Рыс. 106



Рыс. 107

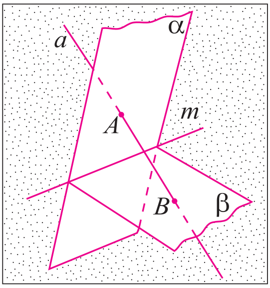
247. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. а) Ці правільна, што прамыя DB і CD_1 скрыжаваныя? б) Ці перасякаюцца прамыя AC і DB_1? в) Ці правільна, што прамыя DB_1 і KT ляжаць у адной плоскасці (пункт K — сярэдзіна канта B_1C_1, а пункт T — сярэдзіна канта DC)?

248. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед (рыс. 107). а) Ці правільна, што прамыя OA_1 і TD паралельныя? б) Ці перасякаюцца прамыя BD_1 і TD? в) Ці з'яўляюцца прамыя OA_1 і CC_1, TD і CC_1 скрыжаванымі?

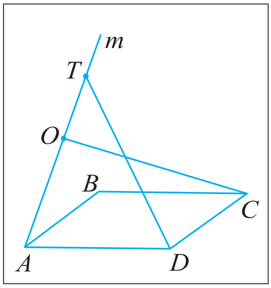
249. $DABC$ — трохвугольная піраміда. Пункты K, T і E — сярэдзіны кантаў AD, CB і DB адпаведна. а) Вызначыце, як размешчаны прамыя AD і CB. б) Ці правільна, што прамыя AE і KT перасякаюцца? в) Колькі пар скрыжаваных прамых вызначаюць вяршыні піраміды?

250. Прамыя a і b паралельныя, а прамая c перасякае прамую a і не перасякае прамую b. Дакажыце, што прамыя b і c скрыжаваныя.

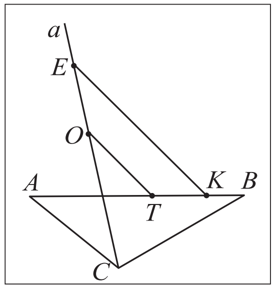
251. Плоскасці α і β перасякаюцца па прамой m, а прамая a перасякае плоскасці α і β адпаведна ў пунктах A і B, якія не ляжаць на прамой m (рыс. 108). Дакажыце, што прамыя m і a скрыжаваныя.



Рыс. 108



Рыс. 109



Рыс. 110

252. Дадзены скрыжаваныя прамыя a і b, пункты A і B ляжаць на прамой a, пункты C і D — на прамой b. Дакажыце, што прамыя AC і BD скрыжаваныя.

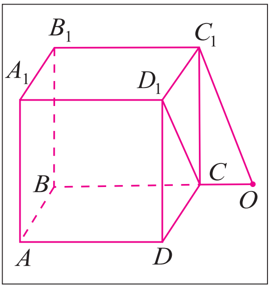
253. Прамая m перасякае плоскасць, у якой ляжыць паралелаграм $ABCD$, у пункце A, $O \in m$, $T \in m$ (рыс. 109). а) Вызначыце ўзаемнае размяшчэнне прамых OC і DT. Абгрунтуйце адказ. б) Дакажыце, што прамыя AB і OC скрыжаваныя. в) Ці правільна, што прамыя TD і BC перасякаюцца?

254. Прамыя a і b, якія перасякаюцца, ляжаць у плоскасці α. Прамая c паралельная прамой a і не ляжыць у плоскасці α. Дакажыце, што прамыя b і c скрыжаваныя.

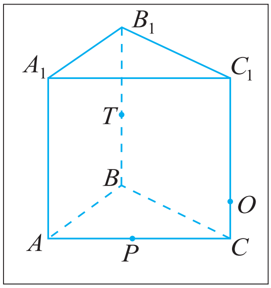
255. Прамая a перасякае плоскасць ABC у пункце C. Пункты O і E ляжаць на прамой a, $T \in AB$, $K \in AB$ (рыс. 110). а) Ці правільна, што прамыя AC і OT перасякаюцца? б) Дакажыце, што прамыя a і AB скрыжаваныя. в) Ахарактарызуйце ўзаемнае размяшчэнне прамых OT і EK.

256. Праз вяршыню A трохвугольніка ABC праведзена прамая a, паралельная медыяне CK гэтага трохвугольніка, а праз вяршыню B — прамая c, якая не ляжыць у плоскасці трохвугольніка. Дакажыце, што прамыя a і c скрыжаваныя.

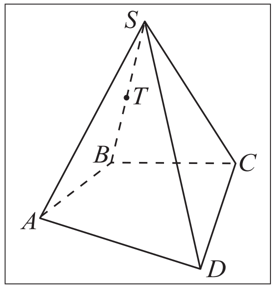
257. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $O \in BC$ (рыс. 111). а) Дакажыце, што прамыя C_1O і AB скрыжаваныя. б) Ці правільна, што прамыя D_1C і BB_1 скрыжаваныя? в) Ці правільна, што прамыя D_1C і C_1O паралельныя? Абгрунтуйце адказ.



Рыс. 111



Рыс. 112



Рыс. 113

258. Пункты T і K — сярэдзіны кантаў AC і SB трохвугольнай піраміды $SABC$ адпаведна. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз прамую CK і паралельная прамой ST.

259. Пункты T, O і P належаць кантам BB_1, CC_1, AC трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ адпаведна (рыс. 112). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз прамую PO і паралельная прамой CT.

260. У трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ пункты T, O, E і K — сярэдзіны кантаў C_1C, CA, CB і BB_1 адпаведна. Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз прамую TO і паралельная прамой EK.

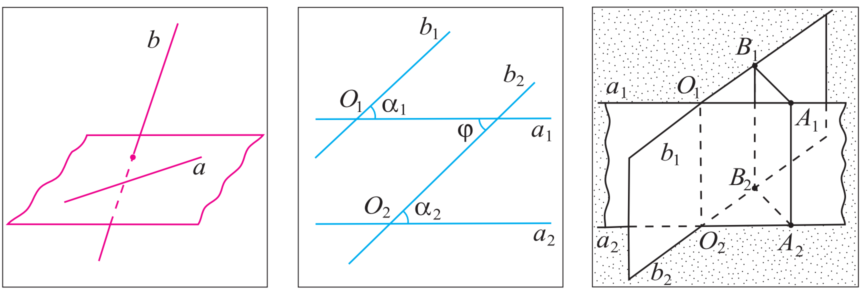
261. У чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ пункт T — сярэдзіна канта SB (рыс. 113). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз прамую TD і паралельная прамой AC.

262. У чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ пункты Q і P — сярэдзіны кантаў SB і SC адпаведна, а пункт R — пункт перасячэння дыяганалей AC і BD асновы. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз прамую DQ і паралельная прамой PR.

§ 4. Вугал паміж прамымі

Любыя дзве прамыя, якія перасякаюцца, ляжаць у адной плоскасці і ўтвараюць чатыры неразгорнутыя вуглы. Калі прамыя, якія перасякаюцца, утвараюць тупыя і вострыя вуглы, то вуглом паміж гэтымі прамымі называецца той, які не перавышае любы з трох астатніх вуглоў. Калі прамыя, якія перасякаюцца, утвараюць чатыры роўныя вуглы, то вугал паміж гэтымі прамымі роўны 90°. Вугал α паміж дзвюма прамымі, якія перасякаюцца, задавальняе ўмову: $0° < \alpha \leqslant 90°$.

Цяпер увядзём паняцце вугла паміж скрыжаванымі прамымі. Няхай a і b — дзве скрыжаваныя прамыя. Возьмем адвольны пункт O_1 у прасторы і правядзём праз яе прамыя a_1 і b_1, паралельныя прамым a і b адпаведна. *Вуглом паміж скрыжаванымі прамымі a і b называецца вугал паміж пабудаванымі прамымі a_1 і b_1, якія перасякаюцца* (рыс. 114, *а*).



а) *б)* *в)*

Рыс. 114

Дакажам, што вугал паміж скрыжаванымі прамымі не залежыць ад выбару пункта O_1. Возьмем любы іншы пункт O_2 і правядзём праз яго прамыя a_2 і b_2, паралельныя прамым a і b адпаведна. Няхай вугал паміж прамымі a_1 і b_1 роўны α_1, а вугал паміж прамымі a_2 і b_2 роўны α_2.

Калі прамыя a_1, b_1, a_2, b_2 ляжаць у адной плоскасці, то па ўласцівасці накрыж ляжачых вуглоў пры паралельных прамых $\alpha_1 = \varphi = \alpha_2$ (рыс. 114, *б*).

Няхай цяпер прамыя a_1 і b_1 перасякаюцца ў пункце O_1 і ляжаць у адной плоскасці, а прамыя a_2 і b_2 перасякаюцца ў пункце O_2 і ляжаць у іншай плоскасці (рыс. 114, *в*). Возьмем на прамых a_1, b_1 і a_2, b_2 пункты A_1, B_1 і A_2, B_2 так, каб $\angle A_1O_1B_1 = \alpha_1$, а чатырохвугольнікі $A_1A_2O_2O_1$ і $B_1B_2O_2O_1$ былі паралелаграмамі ($O_1A_1 = O_2A_2$, $O_1B_1 = O_2B_2$). Тады чатырохвугольнік $A_1B_1B_2A_2$ — паралелаграм ($B_1B_2 = O_1O_2$, $B_1B_2 \parallel O_1O_2$, $A_1A_2 = O_1O_2$, $A_1A_2 \parallel O_1O_2$, значыць, $B_1B_2 = A_1A_2$, $B_1B_2 \parallel A_1A_2$). Адсюль вынікае, што $A_1B_1 = A_2B_2$. Такім чынам, трохвугольнікі $A_1O_1B_1$ і $A_2O_2B_2$ роўныя па трох старанах. З роўнасці гэтых трохвугольнікаў вынікае, што $\alpha_1 = \alpha_2$.

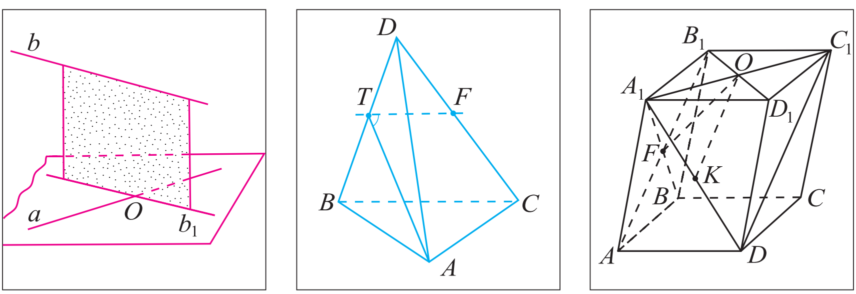
З азначэння вугла паміж скрыжаванымі прамымі вынікае, што ён не перавышае $90°$.

Вугал паміж паралельнымі прамымі лічыцца роўным $0°$.

Дзве прамыя называюцца *ўзаемна перпендыкулярнымі* (*перпендыкулярнымі*), калі вугал паміж імі роўны $90°$. Калі прамая a перпендыкулярная прамой b, то пішуць $a \perp b$.

З азначэння вынікае, што перпендыкулярныя прамыя могуць перасякацца, а могуць быць скрыжаванымі.

Для знаходжання вугла паміж дзвюма дадзенымі скрыжаванымі прамымі a і b можна ўзяць на адной з іх, напрыклад на прамой a, некаторы пункт O і ў плоскасці, якая вызначаецца прамой b і пунктам O, правесці праз пункт O прамую b_1, паралельную прамой b. Тады вугал паміж прамымі a і b_1 роўны вуглу паміж скрыжаванымі прамымі a і b (рыс. 115, *а*).



а) *б)* *в)*

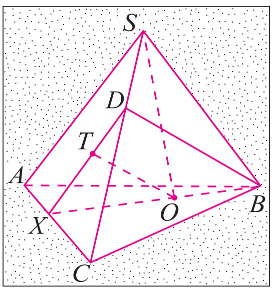
Рыс. 115

Напрыклад, няхай на канце DB трохвугольнай піраміды $DABC$ узяты пункт T (рыс. 115, *б*). Тады вугал паміж

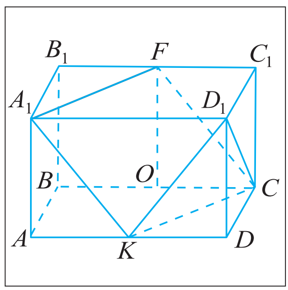
скрыжаванымі прамымі BC і AT роўны вуглу паміж прамой AT і прамой TF, якая праходзіць праз пункт T і паралельная прамой BC у плоскасці BDC.

Разгледзім яшчэ прыклад. Няхай у паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пункт O — пункт перасячэння дыяганалей грані $A_1B_1C_1D_1$, а пункт F — пункт перасячэння дыяганалей грані AA_1B_1B. Вугал паміж скрыжаванымі прамымі C_1D і OF роўны вуглу паміж прамой OF і прамой OK, якая праходзіць у плоскасці C_1DA_1 праз пункт O і паралельная прамой C_1D (рыс. 115, *в*).

Задача 1. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ пункт D належыць канту SC, а пункт O ляжыць унутры трохвугольніка ABC. Пабудуйце вугал паміж прамымі SO і BD.



а)



б)

Рыс. 116

Рашэнне.

1) Разгледзім плоскасць α, якая праходзіць праз прамую DB і пункт O (рыс. 116, *а*).

2) Сячэннем піраміды плоскасцю α з'яўляецца трохвугольнік DXB ($X = BO \cap AC$).

3) У плоскасці DXB праз пункт O правядзём прамую OT, паралельную прамой DB. Тады вугал SOT шуканы.

Задача 2. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$ см, $AD = 2$ см, $AA_1 = 1$ см. Знайдзіце вугал паміж прамымі A_1F і D_1K, дзе пункты F і K — сярэдзіны кантаў B_1C_1 і AD адпаведна.

Рашэнне.

I. *Пабудаванне шуканага вугла.*

1) Разгледзім плоскасць α, якая праходзіць праз прамую A_1F і пункт K (рыс. 116, *б*).

2) Плоскасць α праходзіць праз прамую A_1K, паралельную плоскасці грані BB_1C_1C (паколькі $A_1K \parallel B_1O$, дзе пункт O — сярэдзіна канта BC), а значыць, перасякае гэту грань па адрэзку, паралельнаму прамой B_1O, г. зн. па адрэзку FC.

3) Сячэнне паралелепіпеда плоскасцю α ёсць чатырохвугольнік KA_1FC, які з'яўляецца паралелаграмам (паколькі $A_1K = FC$, $A_1K \parallel FC$). Такім чынам, $KC \parallel A_1F$. Адсюль вынікае, што вугал D_1KC шуканы.

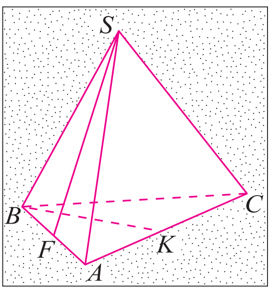
II. *Знаходжанне градуснай меры вугла.*

1) Вугал D_1KC знойдзем з трохвугольніка D_1KC.

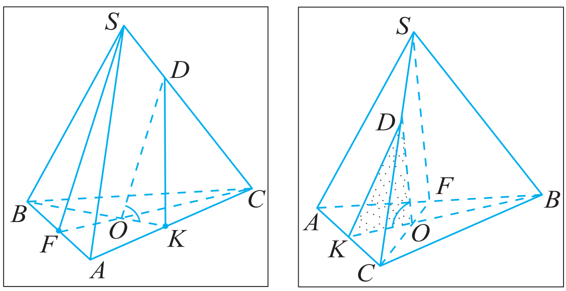
2) $\triangle KDD_1 = \triangle CDD_1$ ($DK = DC$, $\angle KDD_1 = \angle CDD_1 = 90°$, DD_1 — агульная старана), $\triangle KDC = \triangle CDD_1$ ($DK = DD_1$, DC — агульная старана, $\angle KDC = \angle CDD_1 = 90°$). Адсюль вынікае, што трохвугольнік D_1KC роўнастаронні. Значыць, $\angle D_1KC = 60°$.

Адказ: 60°.

Задача 3. $SABC$ — тэтраэдр. Пункты F і K — сярэдзіны яго кантаў AB і AC адпаведна. Знайдзіце косінус вугла паміж прамымі SF і BK (рыс. 117).



Рыс. 117



а) б)

Рыс. 118

Рашэнне.

1) У плоскасці SFC праз пункт $O = BK \cap FC$ правядзём прамую OD, паралельную прамой SF. Тады вугал DOK шуканы. Злучым пункт D з пунктам K і знойдзем косінус вугла DOK трохвугольніка DOK. Для знаходжання косінуса вугла DOK вылічым даўжыні старон трохвугольніка DOK і выкарыстаем тэарэму косінусаў. Няхай даўжыня канта тэтраэдра роўна a, $\angle DOK = x$ (рыс. 118, a, $б$).

2) У трохвугольніку DKC $\left(CD = \frac{2}{3}CS = \frac{2}{3}a,\ \ CK = \frac{a}{2},\right.$ $\left.\angle KCD = 60°\right)$ $DK^2 = CK^2 + CD^2 - 2 \cdot CK \cdot CD \cos 60°$, $DK^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $DK^2 = \frac{13a^2}{36}$.

3) У трохвугольніку SFC $OD \parallel SF$, $OC = \frac{2}{3}FC$, значыць, $OD = \frac{2}{3}SF = \frac{2}{3}\sqrt{SA^2 - FA^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

4) У трохвугольніку DOK $\left(OD = \frac{a}{\sqrt{3}},\ OK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ $DK^2 = OD^2 + OK^2 - 2 \cdot OD \cdot OK \cos x$, $\frac{13a^2}{36} = \frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{36} - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cos x$. Адсюль $\cos x = \frac{1}{6}$.

Адказ: $\frac{1}{6}$.

Пытанні і задачы да § 4

263. Які вугал называецца вуглом паміж скрыжаванымі прамымі?

264. Няхай a і b — скрыжаваныя прамыя, а прамая b_1 паралельная прамой b. Ці правільнае сцверджанне, што вугал паміж прамымі a і b роўны вуглу паміж прамымі a і b_1?

265. Вугал паміж прамымі a і b роўны 90°. Ці правільна, што прамыя a і b перасякаюцца?

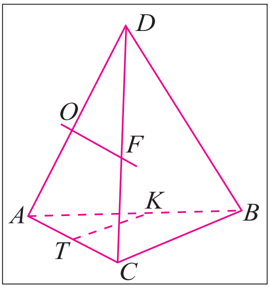
266. Прамыя a і b скрыжаваныя. Прамая l праходзіць праз пункт $O \in a$, паралельная прамой b і ўтварае з прамой a вугал, роўны β. Ці правільна, што вугал паміж прамымі a і b роўны β?

267. $DABC$ — тэтраэдр, пункты O і F — сярэдзіны кантаў AD і CD адпаведна, адрэзак TK — сярэдняя лінія трохвугольніка ABC (рыс. 119, *а*). а) Чаму роўны вугал паміж прамымі OF і CB? б) Ці правільна, што вугал паміж прамымі OF і TK роўны 60°? в) Чаму роўны вугал паміж прамымі TF і DB?

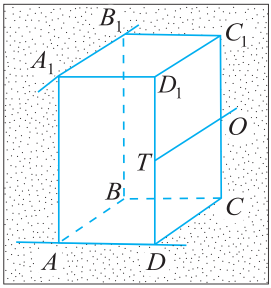
268. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед, пункты O і T — сярэдзіны кантаў CC_1 і DD_1 адпаведна (рыс. 119, *б*). а) Ці правільна, што вугал паміж прамымі AD

і TO роўны 90°? б) Чаму роўны вугал паміж прамымі A_1B_1 і BC?

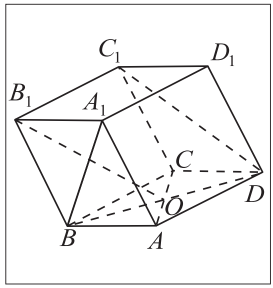
269. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рыс. 119, *в*). а) Ці правільна, што вугал паміж прамымі A_1B і C_1D роўны 90°? б) Знайдзіце вугал паміж прамымі B_1O і C_1D. в) Ці правільна, што вугал паміж прамымі AC і C_1D роўны 45°?



а)



б)



в)

Рыс. 119

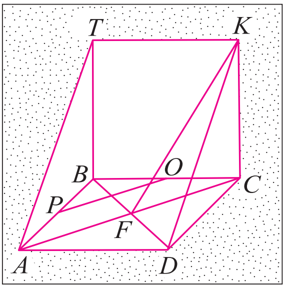
270. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, пункт O — пункт перасячэння дыяганалей грані DD_1C_1C. а) Знайдзіце вугал паміж прамымі A_1O і AB_1. б) Ці правільна, што вугал паміж прамымі A_1O і KT (пункты K і T — сярэдзіны кантаў AA_1 і AD адпаведна) роўны 30°?

271. Два квадраты $ABCD$, $BCKT$ і прамавугольны трохвугольнік ABT ($\angle ABT = 90°$) размешчаны ў прасторы так, як паказана на рысунку 120. Пункты P і O — сярэдзіны адрэзкаў AB і BC адпаведна. а) Знайдзіце вугал паміж прамымі PO і DK. б) Ці правільна, што вугал паміж прамымі TC і DK роўны 90°? в) Знайдзіце вугал паміж прамымі AT і KF, дзе пункт F — пункт перасячэння дыяганалей квадрата $ABCD$.

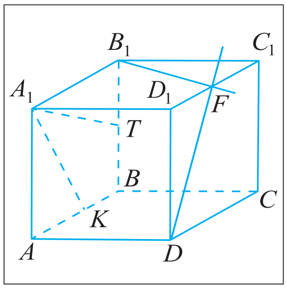
272. У прасторы дадзены квадрат $ABCD$ і трохвугольнікі ABO ($\angle ABO = 90°$) і CBO ($\angle CBO = 90°$), $BC = BO$. а) Ці правільна, што прамыя BO і DC узаемна перпендыкулярныя? б) Знайдзіце вугал паміж прамымі AC і KT, дзе K і T —

сярэдзіны адрэзкаў BO і BC адпаведна. в) Чаму роўны вугал паміж прамымі BD і OC?

273. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Пункты K, F і T — сярэдзіны кантаў AB, D_1C_1 і B_1B адпаведна (рыс. 121). а) Ці правільна, што прамыя A_1T і DF узаемна перпендыкулярныя? б) Чаму роўны вугал паміж прамымі AB і CC_1? в) Вылічыце косінус вугла паміж прамымі A_1K і B_1F.



Рыс. 120



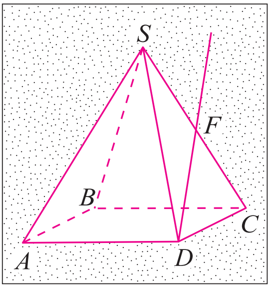
Рыс. 121

274. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$ см, $AA_1 = 1$ см, $AD = 3$ см. Пункты F і K ляжаць на кантах B_1C_1 і AD так, што $B_1F : B_1C_1 = 2 : 3$, $AK : AD = 1 : 3$. Знайдзіце вугал паміж прамымі A_1F і D_1K.

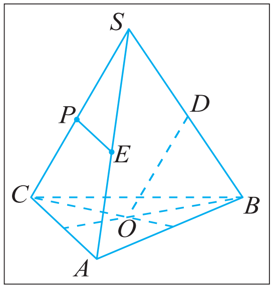
275. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, даўжыня кожнага канта якой роўна a, пункт F — сярэдзіна канта SC (рыс. 122). а) Знайдзіце вугал паміж прамымі AB і SD. б) Перачарціце рысунак у сшытак. Пабудуйце вугал паміж прамымі DF і AC, знайдзіце гэты вугал.

276. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ даўжыня кожнага канта роўна a. Пункт K — сярэдзіна канта SA. Пабудуйце вугал паміж прамымі AD, CK і знайдзіце яго.

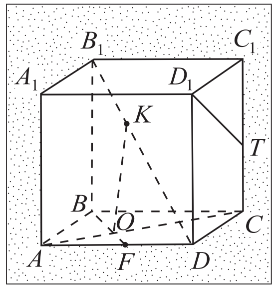
277. $SABC$ — тэтраэдр. Медыяны грані ABC перасякаюцца ў пункце O. Пункты P, E і D — сярэдзіны кантаў SC, SA і SB адпаведна (рыс. 123). а) Знайдзіце вугал паміж прамымі BC і PE. б) Перачарціце рысунак у сшытак. Пабудуйце вугал паміж прамымі BC і OD, знайдзіце гэты вугал.



Рыс. 122



Рыс. 123



Рыс. 124

278. У тэтраэдры $SABC$ пункт O — пункт перасячэння медыян асновы ABC, а пункт D — сярэдзіна канта SB. Знайдзіце вугал паміж прамымі AC і OD.

279. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пункты F і T — сярэдзіны кантаў AD і CC_1 адпаведна, $DK : DB_1 = 2 : 3$, $O = AC \cap BF$, $K \in B_1D$ (рыс. 124). а) Дакажыце, што прамыя OK і D_1T узаемна перпендыкулярныя. б) Знайдзіце вугал паміж прамымі OK і DC. в) Знайдзіце вугал паміж прамымі OK і A_1D.

§ 5. Паралельнасць плоскасцей

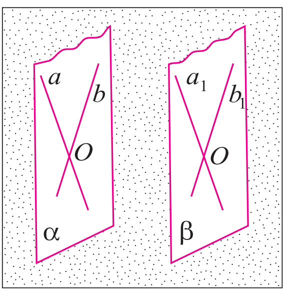
1. Прымета паралельнасці плоскасцей. У дадзеным параграфе разгледзім уласцівасці паралельных плоскасцей.

Азначэнне. **Дзве плоскасці называюцца паралельнымі, калі яны не перасякаюцца.**

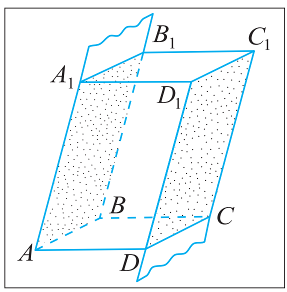
Уяўленне аб паралельных плоскасцях даюць, напрыклад, падлога і столь пакоя, паверхні падлогі і стала, які на ёй стаіць, процілеглыя сценкі шафы і інш.

Калі дзве плоскасці α і β паралельныя, то пішуць $\alpha \parallel \beta$ і гавораць: «Плоскасць α паралельная плоскасці β».

Тэарэма 1 (*прымета паралельнасці плоскасцей*). ***Калі дзве прамыя, што перасякаюцца, адной плоскасці адпаведна паралельныя дзвюм прамым другой плоскасці, то гэтыя плоскасці паралельныя.***



а)



б)

Рыс. 125

Доказ.

Няхай дадзены дзве плоскасці α і β. У плоскасці α ляжаць прамыя a і b, якія перасякаюцца ў пункце O, а ў плоскасці β — прамыя a_1 і b_1 такія, што $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$ (рыс. 125, *а*). Заўважым, што кожная з прамых a і b паралельная плоскасці β ($a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$).

Будзем меркаваць, што плоскасці α і β не паралельныя. Няхай яны перасякаюцца па прамой c. Тады плоскасць α праходзіць праз прамую a, паралельную плоскасці β, і пе-

расякае плоскасць β па прамой c, значыць, прамая a паралельная прамой c (гл. тэарэму **2**, § 2). Аналагічна плоскасць α праходзіць праз прамую b, паралельную плоскасці β, і перасякае яе па прамой c, значыць, прамая b паралельная прамой c.

Такім чынам, з улікам меркавання атрымалі, што праз пункт O праходзяць дзве прамыя a і b, паралельныя прамой c. Але гэта супярэчыць тэарэме аб тым, што праз пункт O праходзіць адзіная прамая, паралельная прамой c. Такім чынам, наша меркаванне няправільнае і плоскасці α і β паралельныя.

Тэарэма даказана.

Тэарэма 2 (*аб уласцівасці процілеглых граней паралелепіпеда*). ***Процілеглыя грані паралелепіпеда ляжаць у паралельных плоскасцях.***

Доказ.

Дакажам, напрыклад, што грані AA_1B_1B і DD_1C_1C паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ляжаць у паралельных плоскасцях. Паколькі $ABCD$ — паралелаграм, то $AB \parallel CD$. Чатырохвугольнік AA_1D_1D — паралелаграм, значыць, $AA_1 \parallel DD_1$. Такім чынам, дзве прамыя, што перасякаюцца, AB і AA_1 плоскасці, у якой ляжыць грань AA_1B_1B, адпаведна паралельны прамым DC і DD_1 плоскасці, у якой ляжыць грань DD_1C_1C, значыць, па прымеце паралельнасці названыя плоскасці паралельныя (рыс. 125, *б*).

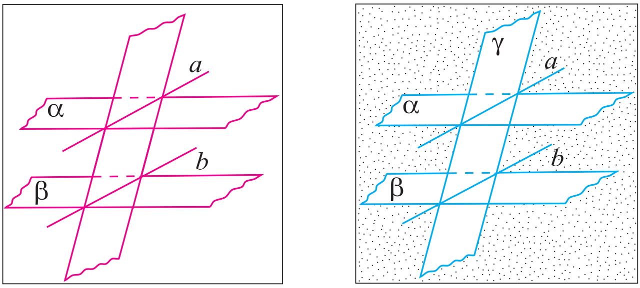
2. Уласцівасці паралельных плоскасцей. Разгледзім некаторыя ўласцівасці паралельных плоскасцей.

Тэарэма 3 (*аб прамых перасячэння дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю*). ***Калі дзве паралельныя плоскасці перасечаны трэцяй, то прамыя іх перасячэння паралельныя паміж сабой.***

Доказ.

Няхай α і β — паралельныя плоскасці, якія перасякае плоскасць γ (рыс. 126, *а*, *б*). Разгледзім прамыя a і b, па якіх плоскасць γ перасякае плоскасці α і β адпаведна. Дакажам, што $a \parallel b$. Сапраўды, гэтыя прамыя ляжаць у адной плоскасці γ і не перасякаюцца. Калі б прамыя a і b перасякаліся,

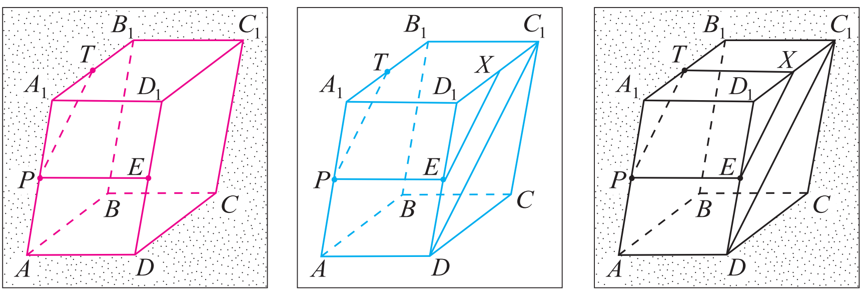
то іх агульны пункт належаў бы плоскасцям α і β, чаго быць не можа, паколькі па ўмове яны паралельныя. Такім чынам, прамыя a і b ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца, г. зн. $a \parallel b$.



а) *б)*

Рыс. 126

Задача 1. Пункты P, T і E — адпаведна сярэдзіны кантаў AA_1, A_1B_1 і DD_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункты P, T і E. Якая фігура атрымаецца ў сячэнні?



а) *б)* *в)*

Рыс. 127

Рашэнне.

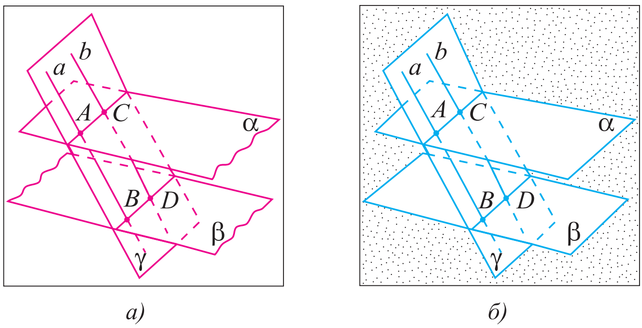
1) Плоскасць PTE перасякае грані AA_1B_1B і AA_1D_1D па адрэзках PT і PE адпаведна (рыс. 127, *а*).

2) Плоскасць грані DD_1C_1C паралельная плоскасці грані AA_1B_1B, значыць, сякучая плоскасць PTE перасякае

плоскасць грані DD_1C_1C па прамой, паралельнай прамой PT. Будуем пункт $X = l \cap D_1C_1$ ($l \parallel DC_1$, $E \in l$) (рыс. 127, *б*).

3) Чатырохвугольнік $TPEX$ — шуканае сячэнне. Паколькі $PT \parallel EX$, $PT = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{1}{2}DC_1 = EK$, то чатырохвугольнік $TPEX$ — паралелаграм (рыс. 127, *в*).

Тэарэма 4. ***Адрэзкі паралельных прамых, размешчаныя паміж паралельнымі плоскасцямі, роўныя.***



Рыс. 128

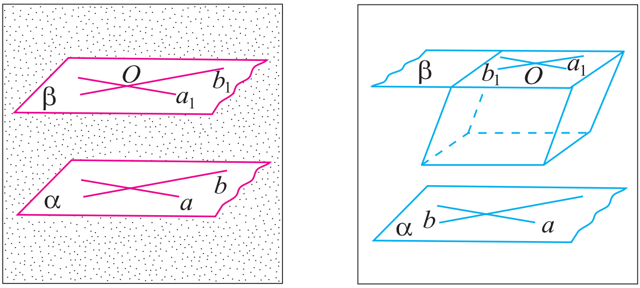
Доказ.

Няхай AB і CD — адрэзкі паралельных прамых a і b, размешчаныя паміж паралельнымі плоскасцямі α і β (рыс. 128, *а*, *б*). Дакажам, што $AB = CD$. Плоскасць γ, якая праходзіць праз паралельныя прамыя a і b, перасякае плоскасці α і β па паралельных прамых AC і BD (тэарэма **2**). Значыць, чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм, паколькі ў ім процілеглыя стораны парамі паралельныя. У паралелаграме процілеглыя стораны роўныя, значыць, $AB = CD$.

Тэарэма даказана.

Задача 2. Дакажыце, што калі прамая l перасякае плоскасць α, то яна перасякае любую плоскасць β, паралельную плоскасці α. Правядзіце доказ самастойна.

Тэарэма 5 (*аб існаванні адзінай плоскасці, якая паралельная дадзенай плоскасці і праходзіць праз пункт па-за ёй*). ***Праз пункт, які не ляжыць у дадзенай плоскасці, праходзіць адзіная плоскасць, паралельная дадзенай.***



а) *б)*

Рыс. 129

I. *Дакажам існаванне плоскасці.*

1) Няхай пункт O не ляжыць у дадзенай плоскасці α. Разгледзім у плоскасці α якія-небудзь дзве прамыя a і b, якія перасякаюцца (рыс. 129, *а*, *б*).

2) Правядзём праз пункт O прамыя a_1 і b_1, паралельныя прамым a і b адпаведна.

3) Разгледзім плоскасць β, якая праходзіць праз прамыя a_1 і b_1.

4) Плоскасць β — шуканая, паколькі яна праходзіць праз пункт O і па прымеце паралельнасці дзвюх плоскасцей паралельная плоскасці α.

II. *Дакажам адзінасць плоскасці.*

1) Будзем меркаваць, што існуе іншая плоскасць β_1, якая праходзіць праз пункт O і паралельная плоскасці α.

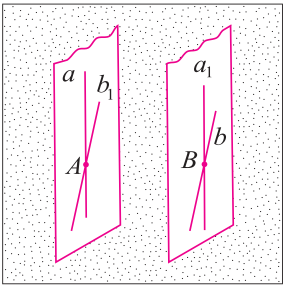
2) Няхай l — прамая, па якой плоскасць β_1 перасякае плоскасць β. Правядзём у плоскасці β_1 прамую b, якая перасякае прамую l.

3) Прамая b перасякае плоскасць β, таму яна перасякае і паралельную ёй плоскасць α. Значыць, плоскасць β_1, у якой ляжыць прамая b, перасякае плоскасць α.

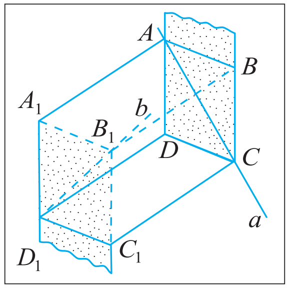
Такім чынам, наша меркаванне няправільнае і плоскасць β адзіная.

Тэарэма даказана.

Задача 3. Дакажыце, што праз дзве скрыжаваныя прамыя a і b можна правесці дзве паралельныя плоскасці α і β ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$), і прытым такая пара плоскасцей адзіная.



а)



б)

Рыс. 130

Доказ.

Няхай a і b — скрыжаваныя прамыя (рыс. 130, *а*). Возьмем адвольныя пункты $A \in a$, $B \in b$ і правядзём праз іх прамыя $b_1 \parallel b$, $a_1 \parallel b_1$, $A \in b_1$, $B \in a_1$. Пары a, b_1 і b, a_1 прамых, што перасякаюцца, вызначаюць плоскасці α і β адпаведна. Тады згодна з прыметай паралельнасці плоскасцей плоскасці α і β паралельныя.

Дакажам адзінасць існавання такой пары плоскасцей.

Дапусцім, што існуе яшчэ пара плоскасцей α_1 і β_1 такіх, што $\alpha_1 \parallel \beta_1$, $a \subset \alpha_1$, $b \subset \beta_1$. Праз пункт B і прамую a правядзём плоскасць γ. Няхай гэта плоскасць перасякае плоскасці β і β_1 па прамых c і c_1 адпаведна. Паколькі $B \in b$, $b \subset \beta$, $b \subset \beta_1$, то прамыя c і c_1 праходзяць праз пункт B. Тады па тэарэме **2** $a \parallel c$, $a \parallel c_1$, а гэта супярэчыць таму, што праз пункт B паза дадзенай прамой a можна правесці адзіную прамую, паралельную дадзенай.

Атрыманая супярэчнасць гаворыць аб тым, што наша дапушчэнне няправільнае, а значыць, існуе адзіная пара плоскасцей α і β, якія задавальняюць умову задачы.

Напрыклад, калі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, тады пара паралельных плоскасцей, якія праходзяць праз скрыжаваныя прамыя AC і B_1D_1, ёсць плоскасці граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ (рыс. 130, *б*).

Пытанні і задачы да § 5

280. Ці можна прымету паралельнасці дзвюх плоскасцей сфармуляваць так: дзве плоскасці паралельныя, калі дзве прамыя першай плоскасці паралельныя дзвюм прамым другой плоскасці?

281. Ці правільнае сцверджанне, што калі праз кожную з паралельных прамых правесці плоскасць, то гэтыя плоскасці паралельныя?

282. Ці можна дзве паралельныя плоскасці перасячы трэцяй плоскасцю па дзвюх непаралельных прамых?

283. Ці можна дзве плоскасці, што перасякаюцца, перасячы трэцяй плоскасцю па паралельных прамых?

284. Колькі можна правесці праз дадзены пункт плоскасцей, паралельных дадзенай плоскасці?

285. Ці паралельныя паміж сабой дзве плоскасці, калі яны паралельныя адной і той жа прамой?

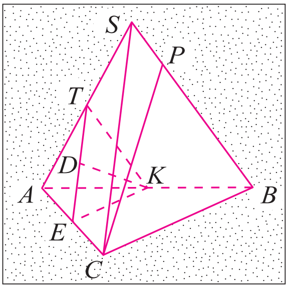
286. Пункт A ляжыць у плоскасці α, паралельнай плоскасці β. Дакажыце, што кожная прамая, якая праходзіць праз пункт A і паралельная плоскасці β, ляжыць у плоскасці α.

287. Плоскасці α і β паралельныя, а прамая l паралельная плоскасці α. Дакажыце, што прамая l або паралельная плоскасці β, або ляжыць у плоскасці β.

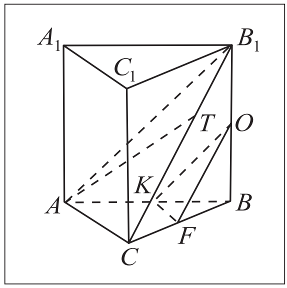
288. Дзве плоскасці α і β паралельныя плоскасці γ. Дакажыце, што плоскасці α і β паралельныя.

289. Пункты T, K і E — сярэдзіны кантаў SA, AB і AC пірамiды $SABC$ адпаведна, адрэзак DK — медыяна трохвугольніка TKE (рыс. 131, *а*). а) Дакажыце, што прамая DK паралельная плоскасці SBC. б) Ці правільна, што прамая CP перасякае плоскасць TKE?

290. $ABCA_1B_1C_1$ — трохвугольная прызма, пункты O, F і K — сярэдзіны кантаў BB_1, BC і BA адпаведна, $T \in CB_1$ (рыс. 131, *б*). а) Дакажыце, што плоскасці ACB_1 і OKF паралельныя. б) Ці правільна, што прамая AT паралельная плоскасці OKF?



а)



б)

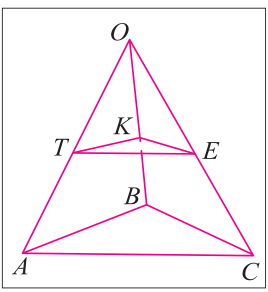
Рыс. 131

291. Няхай $SABC$ — трохвугольная піраміда. Пункт S з'яўляецца сярэдзінай адрэзкаў AA_1, BB_1 і CC_1. Дакажыце што плоскасць $A_1B_1C_1$ паралельная плоскасці ABC.

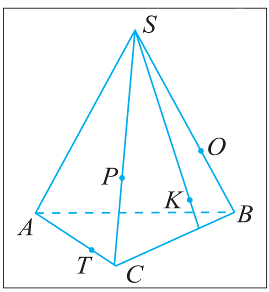
292. Пункт O не ляжыць у плоскасці трохвугольніка ABC, пункты T, K і E — сярэдзіны адрэзкаў OA, OB і OC адпаведна. а) Дакажыце, што плоскасці TKE і ABC паралельныя. б) Вылічыце плошчу трохвугольніка TKE, калі плошча трохвугольніка ABC роўна 16 см^2 (рыс. 132).

293. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — чатырохвугольная прызма. Дакажыце, што асновы $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ прызмы ляжаць у паралельных плоскасцях.

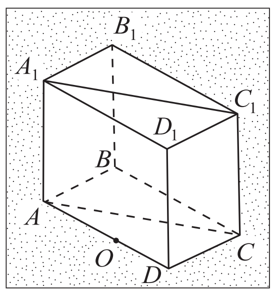
294. $SABC$ — трохвугольная піраміда. Пункты T і P належаць кантам AC і SC адпаведна, а пункт K — грані SCB (рыс. 133). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт $O \in SB$ і паралельная плоскасці TPK.



Рыс. 132



Рыс. 133



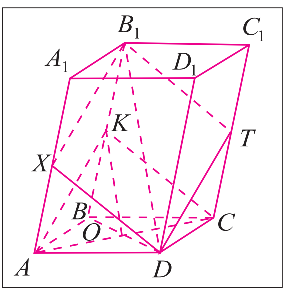
Рыс. 134

295. *SABC* — тэтраэдр. Пункт *T* — сярэдзіна канта *SC*, а пункт *O* — сярэдзіна адрэзка *TC*. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт *O* і паралельная плоскасці *ATB*. Вылічыце перыметр гэтага сячэння, калі даўжыня канта тэтраэдра роўна 4 см.

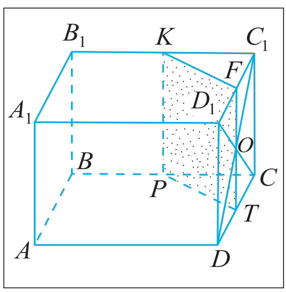
296. Чатырохвугольнік ACC_1A_1 — сячэнне паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскасцю ACC_1 (рыс. 134). а) Ці правільна, што чатырохвугольнік ACC_1A_1 — паралелаграм? б) Перачарціце відарыс паралелепіпеда ў сшытак і пабудуйце сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз пункт *O* і паралельная плоскасці ACC_1.

297. Пакажыце відарыс паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і пабудуйце яго сячэнні плоскасцямі AA_1C_1 і *ADK*, дзе пункт *K* — сярэдзіна канта CC_1. Пабудуйце адрэзак, па якім перасякаюцца гэтыя сячэнні.

298. На рысунку 135 паказаны відарыс сячэння B_1XDT паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз пункт B_1 і паралельная плоскасці *AKC*, дзе пункт *K* — сярэдзіна канта BB_1. а) Ці правільна, што чатырохвугольнік B_1XDT — паралелаграм? б) Дакажыце, што прамыя *KO* і B_1D паралельныя, дзе $O = BD \cap AC$.



Рыс. 135



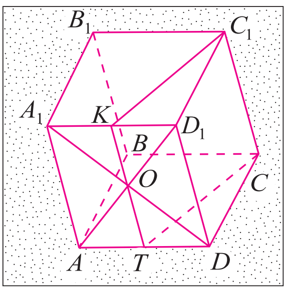
Рыс. 136

299. Пакажыце відарыс паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта DD_1 і паралельная плоскасці *AKC*, дзе пункт *K* — сярэдзіна канта BB_1. Пабудуйце адрэзак, па якім атрыманае сячэнне перасякае дыяганальнае сячэнне BDD_1B_1.

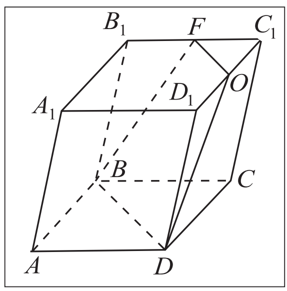
300. Чатырохвугольнік $PTFK$ — сячэнне паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз пункт O і паралельная плоскасці BDD_1 (рыс. 136). а) Патлумачце, чаму прамыя KF і PT паралельныя. б) Ці правільна, што прамыя PK і TF паралельныя? в) Чаму прамая AA_1 паралельная плоскасці сячэння?

301. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед, аснова якога ёсць квадрат, даўжыня стараны якога 1 см, а даўжыня бакавога канта 4 см. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта AA_1 і паралельная плоскасці ADC_1. Вылічыце яго перыметр.

302. Чатырохвугольнік TKC_1C — сячэнне паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз пункт O і кант CC_1 (рыс. 137). а) Ці правільна, што прамая KT паралельная прамой CC_1? б) Дакажыце, што прамая BB_1 паралельная плоскасці TKC_1C.



Рыс. 137



Рыс. 138

303. Пабудуйце відарыс паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і яго сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей грані $ABCD$ і паралельная плоскасці ADC_1. Дакажыце, што прамая B_1D паралельная плоскасці сячэння.

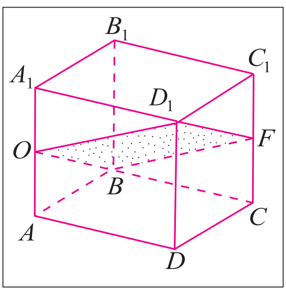
304. Чатырохвугольнік $BDOF$ — сячэнне паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз прамую BD і сярэдзіну O канта D_1C_1 (рыс. 138). а) Дакажыце, што пра-

мыя BD і FO паралельныя. б) Ці правільна, што чатырохвугольнік $BDOF$ з'яўляецца трапецыяй?

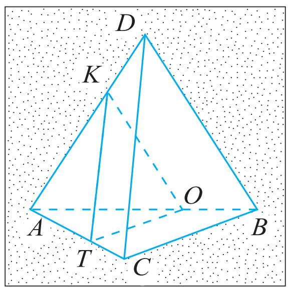
305. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамая чатырохвугольная прызма, аснова якой — ромб, даўжыня стараны якога 6 см, а адзін з вуглоў $60°$. Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз меншую дыяганаль B_1D_1 ромба і сярэдзіну канта AD. Вылічыце плошчу сячэння, калі даўжыня бакавога канта прызмы роўна 10 см.

306. Чатырохвугольнік BFD_1O — сячэнне паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз прамую BD_1 і сярэдзіну O канта AA_1 (рыс. 139). а) Дакажыце, што чатырохвугольнік BFD_1O — паралелаграм. б) Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт A і паралельная плоскасці сячэння BFD_1O.

307. Усе канты прамой прызмы $ABCA_1B_1C_1$ роўныя паміж сабой. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы, калі плошча сячэння прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыні A, B і сярэдзіну канта CC_1, роўна S.



Рыс. 139



Рыс. 140

308. Трохвугольнік TKO — сячэнне правільнай трохвугольнай піраміды $DABC$ плоскасцю, якая праходзіць праз пункт O ($BO : OA = 1 : 2$) і паралельная плоскасці DBC (рыс. 140). Дакажыце, што трохвугольнікі TKO і CDB падобныя. Вылічыце перыметр трохвугольніка TKO, калі даўжыня стараны асновы піраміды роўна 3 см, а даўжыня бакавога канта — 9 см.

309. У трохвугольнай пірамідзе $DABC$ сячэнне, паралельнае плоскасці ABC, перасякае бакавы кант у пункце, які дзеліць яго ў адносіне $1:3$ (лічачы ад вяршыні піраміды). Знайдзіце плошчу сячэння, калі плошча трохвугольніка ABC роўна S.

310. У пірамідзе $DABC$ сячэнне, паралельнае аснове, перасякае бакавы кант у пункце, які дзеліць яго ў адносіне $2:3$ (лічачы ад вяршыні піраміды). Вылічыце плошчу сячэння, калі яго плошча на 84 см^2 меншая за плошчу асновы.

311. Чатырохвугольнік $OTEK$ — сячэнне правільнай чатырохвугольнай піраміды $SABCD$ плоскасцю, якая праходзіць праз пункт O ($SO:OA=2:3$) і паралельная плоскасці SCD (рыс. 141). Вылічыце перыметр сячэння, калі $CD=30$ см, $SD=25$ см.

312. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, а градусная мера вугла пры вяршыні S грані DSC роўна $60°$. Праз пункт O, узяты на канце AD, праведзена сячэнне плоскасцю, паралельнай грані SDC. Вылічыце перыметр гэтага сячэння, калі даўжыня яго дыяганалі роўна 7 см, а $AO=3$ см.

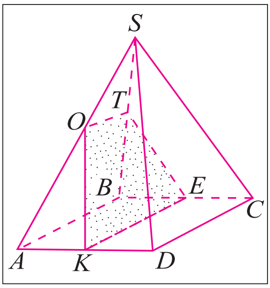
313. $TABC$ — правільная трохвугольная піраміда. Пункты D і E — сярэдзіны кантаў AB і TA адпаведна. Трохвугольнікі EKC і TDP — паралельныя сячэнні, якія праходзяць праз CE і TD адпаведна, $K \in AB$, $P \in CB$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка TDP, калі плошча трохвугольніка EKC роўна S (рыс. 142).

314. $SABC$ — правільная трохвугольная піраміда. Пункты F, K і T — сярэдзіны кантаў SC, AC і AB адпаведна. Плошча сячэння плоскасцю, якая праходзіць праз прамую AF і паралельная прамой BC, роўна Q. Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункты K, T і паралельная прамой AF.

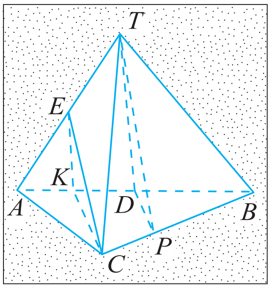
315. Бакавы кант чатырохвугольнай піраміды разделены на тры роўныя часткі, праз пункты дзялення праведзены

плоскасці, паралельныя плоскасці асновы. Знайдзіце плошчу атрыманых сячэнняў, калі плошча асновы роўна S.

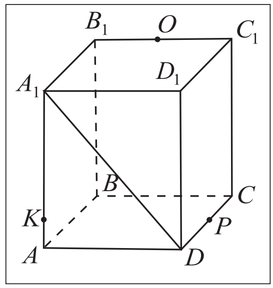
316. $SABC$ — трохвугольная піраміда. Пункт O дзеліць бакавы кант SA піраміды ў адносіне $2:3$ (лічачы ад вяршыні S). Трохвугольнік OFK — сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт O і паралельная плоскасці ABC, $F \in SB$, $K \in SC$. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды $SOFK$, калі плошча бакавой паверхні піраміды $SABC$ роўна Q.



Рыс. 141



Рыс. 142



Рыс. 143

317. Плошча сячэння піраміды плоскасцю α, якая праходзіць праз пункт на бакавым канце і паралельная аснове, роўна 5 см^2. У якой адносіне плоскасць α дзеліць бакавы кант піраміды, калі плошча асновы роўна 45 см^2.

318. Даўжыня стараны асновы правільнай трохвугольнай піраміды роўна a, а даўжыня бакавога канта — b. Праз пункт, які дзеліць бакавы кант у адносіне $1:3$ (лічачы ад вяршыні піраміды), праведзена сячэнне, паралельнае бакавой грані. Знайдзіце плошчу гэтага сячэння.

319. Пункт O дзеліць кант A_1D_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у адносіне $2:3$ $(A_1O:OD_1 = 3:2)$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт O і паралельная плоскасці AB_1C. Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, калі плошча трохвугольніка AB_1C роўна 50 см^2.

320. У паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пункты O, P і K ляжаць на кантах B_1C_1, DC і AA_1 адпаведна (рыс. 143). Выканайце відарыс паралелепіпеда ў сшытку і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю OPK.

321. Пункты O, E і K — сярэдзіны кантаў AD, CC_1 і A_1B_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ адпаведна. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю OEK.

3

ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦЬ ПРАМОЙ І ПЛОСКАСЦІ. ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦЬ ПЛОСКАСЦЕЙ



Раздзел 3

ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦЬ ПРАМОЙ І ПЛОСКАСЦІ. ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦЬ ПЛОСКАСЦЕЙ

§ 1. Перпендыкулярнасць прамой і плоскасці

1. Прамая, перпендыкулярная плоскасці. У папярэднім раздзеле было вызначана паняцце перпендыкулярнасці прамых у прасторы. Цяпер разгледзім паняцце перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.

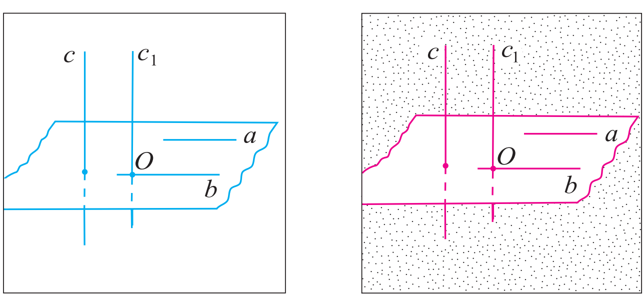
Азначэнне. **Прамая, якая перасякае плоскасць, называецца перпендыкулярнай плоскасці, калі яна перпендыкулярная кожнай прамой, што ляжыць у гэтай плоскасці.**

Калі прамая a перпендыкулярная плоскасці α, то пішуць $a \perp \alpha$. У гэтым выпадку гавораць таксама, што плоскасць α перпендыкулярная прамой a.

Уяўленне аб частцы прамой, перпендыкулярнай плоскасці, дае прамая перасячэння паверхняў сцен пакоя адносна плоскасці падлогі. Калоны будынка размяшчаюцца перпендыкулярна адносна плоскасці фундамента.

У далейшым спатрэбіцца наступная тэарэма аб перпендыкулярнасці дзвюх паралельных прамых трэцяй прамой.

Тэарэма 1. ***Калі адна з дзвюх паралельных прамых перпендыкулярная трэцяй прамой, то і другая прамая перпендыкулярная гэтай прамой.***



а) б)

Рыс. 144

Д о к а з.

Няхай a і b — паралельныя прамыя і $a \perp c$. Дакажам, што $a \perp b$. Возьмем пункт O на прамой b і праз яго правядзём прамую c_1, паралельную прамой c. Тады вугал паміж прамымі b і c роўны вуглу паміж прамымі b і c_1, якія перасякаюцца. Паколькі $b \parallel a$ і $c \parallel c_1$, то вугал паміж прамымі b і c_1 роўны вуглу паміж прамымі a і c, г. зн. роўны 90°. Адсюль вынікае, што $b \perp c$ (рыс. 144, *а*, *б*).

Тэарэма даказана.

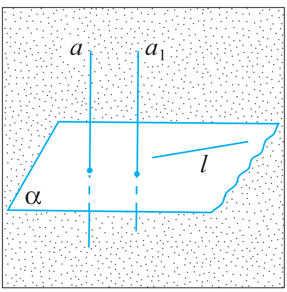
Цяпер дакажам дзве тэарэмы, у якіх устанаўліваецца сувязь паміж паралельнасцю прамых і іх перпендыкулярнасцю плоскасці.

Т э а р э м а 2. ***Калі адна з дзвюх паралельных прамых перпендыкулярная плоскасці, то і другая прамая перпендыкулярная гэтай плоскасці.***

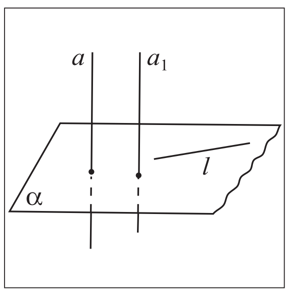
Д о к а з.

Няхай прамыя a і a_1 паралельныя і прамая a перпендыкулярная плоскасці α. Дакажам, што прамая a_1 таксама перпендыкулярная плоскасці α. Разгледзім адвольную прамую l у плоскасці α (рыс. 145, *а*, *б*). Паколькі $a \perp \alpha$, то $a \perp l$. З тэарэмы **1** вынікае, што $a_1 \perp l$. Такім чынам, прамая a_1 перпендыкулярная любой прамой, якая ляжыць у плоскасці α, г. зн. $a_1 \perp \alpha$.

Тэарэма даказана.



а)



б)

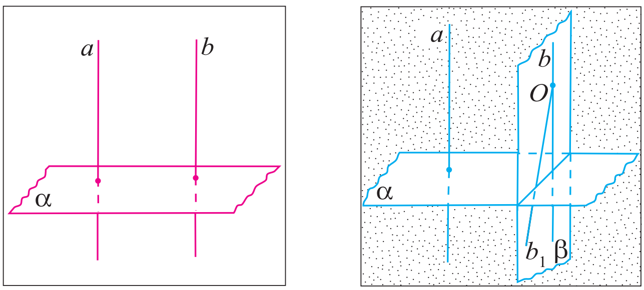
Рыс. 145

Т э а р э м а 3 (*аб паралельнасці прамых, перпендыкулярных плоскасці*). ***Калі дзве прамыя перпендыкулярныя адной плоскасці, то яны паралельныя.***

Доказ.

Няхай прамыя a і b перпендыкулярныя плоскасці α (рыс. 146, *а*). Дакажам, што прамыя a і b паралельныя. Дапусцім, што прамая b не паралельная прамой a. Праз адвольны пункт O прамой b правядзём прамую b_1, паралельную прамой a. Па тэарэме **2** прамая b_1 перпендыкулярная плоскасці α. Разгледзім плоскасць β, у якой ляжаць прамыя b і b_1. Няхай l — прамая, па якой перасякаюцца плоскасці α і β (рыс. 146, *б*). Тады ў плоскасці β праз пункт O праходзяць дзве прамыя b і b_1, перпендыкулярныя прамой l. Але гэта немагчыма, значыць, наша меркаванне няправільнае і $a \parallel b$.

Тэарэма даказана.



а) *б)*

Рыс. 146

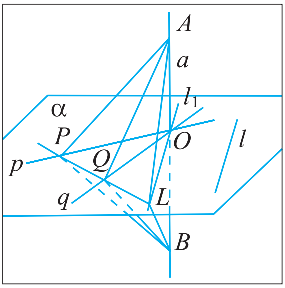
Для выяўлення факта перпендыкулярнасці прамой і плоскасці дастаткова праверыць перпендыкулярнасць прамой толькі дзвюм прамым, якія перасякаюцца і ляжаць у гэтай плоскасці. Гэта вынікае з наступнай тэарэмы.

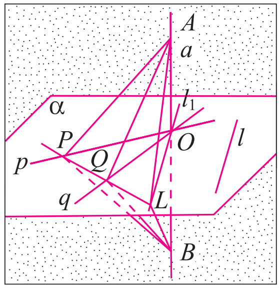
2. Прымета перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.

Тэарэма 4 (*прымета перпендыкулярнасці прамой і плоскасці*). ***Калі прамая перпендыкулярная дзвюм прамым, якія перасякаюцца і ляжаць у плоскасці, то яна перпендыкулярная гэтай плоскасці.***

Доказ.

Няхай прамая a перпендыкулярная прамым p і q, якія ляжаць у плоскасці α і перасякаюцца ў пункце O. Дакажам, што прамая перпендыкулярная плоскасці α. Для гэтага трэба даказаць, што прамая a перпендыкулярная адвольнай прамой l плоскасці α.





Рыс. 147

Разгледзім першы выпадак, калі прамая a праходзіць праз пункт O. Правядзём праз пункт O прамую l_1, паралельную прамой l (калі прамая l праходзіць праз пункт O, то ў якасці l_1 возьмем прамую l). Адзначым на прамой a пункты A і B так, каб пункт O быў сярэдзінай адрэзка AB, і правядзём у плоскасці α прамую, якая перасякае прамыя p, q і l адпаведна ў пунктах P, Q і L. Няхай для пэўнасці пункт Q ляжыць паміж пунктамі P і L (рыс. 147, *а*, *б*).

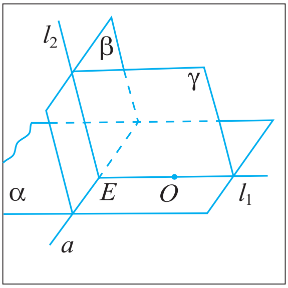
Заўважым, што $AP = BP$ і $AQ = BQ$, паколькі $\triangle AOP = \triangle BOP$ і $\triangle AOQ = \triangle BOQ$ (названыя трохвугольнікі роўныя па двух катэтах). Значыць, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ (паколькі $AP = BP$, $AQ = BQ$, PQ — агульная старана). З роўнасці гэтых трохвугольнікаў вынікае, што $\angle APQ = \angle BPQ$.

Трохвугольнікі APL і BPL роўныя (паколькі $AP = BP$, PL — агульная старана, а $\angle APL = \angle BPL$), значыць, $AL = BL$. Такім чынам, трохвугольнік ABL раўнабедраны, і яго медыяна OL з'яўляецца вышынёй, г. зн. прамая l_1 перпендыкулярная прамой a. Паколькі прамая l_1 паралельная прамой l, то па тэарэме **1** $l \perp a$. Прамая a перпендыкулярная кожнай прамой l плоскасці α, значыць, $a \perp \alpha$.

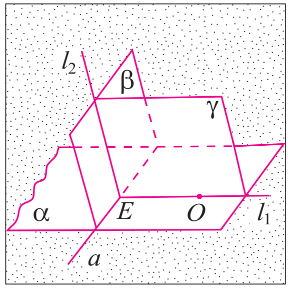
Калі прамая a не праходзіць праз пункт O, тады правядзём праз пункт O прамую a_1, паралельную прамой a. У гэтым выпадку па тэарэме **1** $a_1 \perp p$ і $a_1 \perp q$. Значыць, па даказаным у першым выпадку $a_1 \perp \alpha$. Цяпер па тэарэме **2** прамая a перпендыкулярная плоскасці α. Тэарэма даказана.

Тэарэма 5 (*аб плоскасці, якая праходзіць праз дадзены пункт і перпендыкулярная дадзенай прамой*). ***Праз любы***

пункт прасторы праходзіць адзіная плоскасць, перпендыкулярная дадзенай прамой.



а)



б)

Рыс. 148

Доказ.

I. *Дакажам існаванне плоскасці.*

Няхай a — дадзеная прамая, а пункт O — адвольны пункт прасторы. Дакажам, што існуе плоскасць, якая праходзіць праз пункт O і перпендыкулярная прамой a.

1) Разгледзім плоскасць α, якая праходзіць праз прамую a і пункт O, і плоскасць β, якая праходзіць праз прамую a (рыс. 148, *а*, *б*).

2) У плоскасці α праз пункт O правядзём прамую l_1, перпендыкулярную прамой a. Няхай пункт E — пункт перасячэння прамых a і l_1.

3) Праз пункт E ў плоскасці β правядзём прамую l_2, перпендыкулярную прамой a.

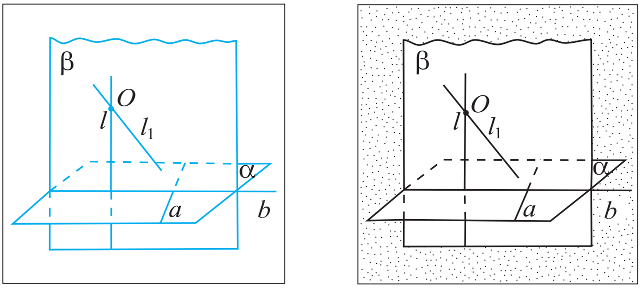
4) Плоскасць γ, якая праходзіць праз прамыя l_1 і l_2, з'яўляецца шуканай. Сапраўды, прамая a перпендыкулярная дзвюм прамым l_1 і l_2, якія ляжаць у плоскасці γ і перасякаюцца, значыць, яна перпендыкулярная плоскасці γ.

II. *Дакажам адзінасць плоскасці.*

Дапусцім, што праз пункт O праходзіць яшчэ адна плоскасць γ_1, перпендыкулярная прамой a. Няхай плоскасць γ_1 перасякае плоскасць α па прамой p_1. Тады $a \perp l_1$ і $a \perp p_1$. Значыць, у плоскасці α праз пункт O праходзяць дзве прамыя l_1 і p_1, перпендыкулярныя прамой a. Як вядома з планіметрыі, гэтага быць не можа. Такім чынам, наша дапушчэнне няправільнае і плоскасць γ адзіная.

Тэарэма даказана.

Тэарэма 6 (*аб прамой, якая праходзіць праз дадзены пункт і перпендыкулярная дадзенай плоскасці*). ***Праз любы пункт прасторы праходзіць адзіная прамая, перпендыкулярная дадзенай плоскасці.***



а) *б)*

Рыс. 149

Доказ.

I. *Дакажам існаванне прамой.*

Няхай дадзена плоскасць α і пункт *O* — адвольны пункт прасторы. Дакажам, што існуе прамая, якая праходзіць праз пункт *O* і перпендыкулярная плоскасці α (рыс. 149, *а*, *б*).

1) Правядзём у плоскасці α некаторую прамую *a* і разгледзім плоскасць β, якая праходзіць праз пункт *O* і перпендыкулярная прамой *a*.

2) Абазначым літарай *b* прамую, па якой перасякаюцца плоскасці α і β.

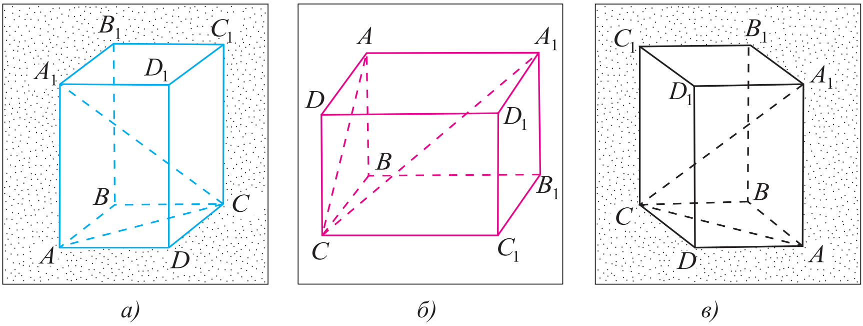
3) У плоскасці β праз пункт *O* правядзём прамую *l*, перпендыкулярную прамой *b*. Прамая *l* — шуканая прамая. Сапраўды, прамая *l* перпендыкулярная дзвюм прамым *a* і *b*, якія ляжаць у плоскасці α і перасякаюцца ($l \perp b$ па пабудаванні і $l \perp a$, паколькі $\beta \perp a$), значыць, яна перпендыкулярная плоскасці α (гл. рыс. 149, *а*, *б*).

II. *Дакажам адзінасць плоскасці.*

Будзем меркаваць, што праз пункт *O* праходзіць яшчэ адна прамая l_1, перпендыкулярная плоскасці α. Тады па тэарэме **3** прамыя *l* і l_1 паралельныя, што немагчыма, паколькі прамыя *l* і l_1 перасякаюцца ў пункце *O*. Такім чынам, наша меркаванне няправільнае і праз пункт *O* праходзіць адна прамая, перпендыкулярная плоскасці α.

Тэарэма даказана.

Т э а р э м а 7 (*аб уласцівасці дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда*). ***Квадрат даўжыні дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда роўны суме квадратаў даўжынь трох яго кантаў, якія маюць агульную вяршыню.***



Рыс. 150

Д о к а з.

Няхай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед (усе яго грані — прамавугольнікі). Дакажам, што $A_1C^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

З умовы вынікае, што $AA_1 \perp AB$ і $AA_1 \perp AD$. Значыць, па прымеце перпендыкулярнасці прамой плоскасці прамая AA_1 перпендыкулярная плоскасці, у якой ляжыць грань $ABCD$. Адсюль вынікае, што $AA_1 \perp AC$. У прамавугольным трохвугольніку A_1AC па тэарэме Піфагора $A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$. Акрамя таго, $AC^2 = AB^2 + AD^2$ (паколькі AC — дыяганаль прамавугольніка $ABCD$). Значыць, $A_1C^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$ (рыс. 150, *а*, *б*, *в*).

В ы н і к. **Дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда роўныя.**

Задача. Дакажыце, што калі прамая перпендыкулярная адной з дзвюх паралельных плоскасцей, то гэта прамая перпендыкулярная і другой плоскасці.

Д о к а з. Няхай плоскасці α і β паралельныя, а прамая $l \perp \alpha$. Дакажам, што $l \perp \beta$.

1) Разгледзім прамыя a і b, якія ляжаць у плоскасці α і перасякаюцца.

2) Праз адвольны пункт у плоскасці β правядзём прамыя a_1 і b_1, паралельныя прамым a і b адпаведна. Гэтыя прамыя ляжаць у плоскасці β (раздзел **2**, § 2, задача 2).

3) Прамая l перпендыкулярная прамым a і b (паколькі $l \perp \alpha$), значыць, яна перпендыкулярная прамым a_1 і b_1 (раздзел **3**, § **1**, тэарэма **1**).

4) Такім чынам, прамая l перпендыкулярная дзвюм прамым a_1 і b_1, якія ляжаць у плоскасці β і перасякаюцца, значыць, прамая $l \perp \beta$.

Пытанні і задачы да § 1

322. Ці правільнае сцверджанне, што прамая a, перпендыкулярная прамой l, якая ляжыць у плоскасці β, перпендыкулярная плоскасці β?

323. Прамая l перпендыкулярная дзвюм прамым, якія ляжаць у плоскасці α. Ці правільнае сцверджанне, што прамая l перпендыкулярная плоскасці α?

324. Як размешчаны паміж сабой дзве прамыя, перпендыкулярныя адной і той жа плоскасці?

325. Ці правільнае сцверджанне, што дзве прамыя, перпендыкулярныя трэцяй прамой, паралельныя паміж сабой?

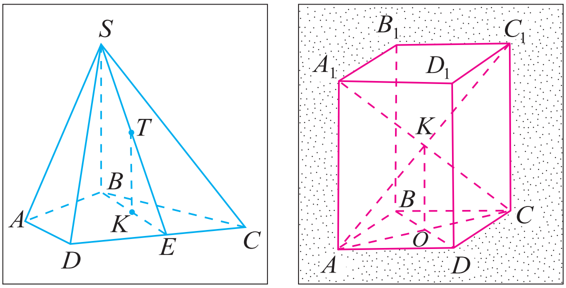
326. Ці будуць паралельнымі паміж сабой дзве плоскасці, перпендыкулярныя адной і той жа плоскасці?

327. Дакажыце, што дзве плоскасці, перпендыкулярныя адной і той жа прамой, паралельныя паміж сабой.

328. $SABCD$ — чатырохвугольная піраміда, у якой бакавы кант SB перпендыкулярны плоскасці асновы, пункт E ляжыць на канце DC. а) Дакажыце, што прамая KT перпендыкулярная плоскасці асновы (пункты K і T — сярэдзіны адрэзкаў BE і SE адпаведна). б) Чаму роўны вугал паміж прамымі KT і AD (рыс. 151, *а*)?

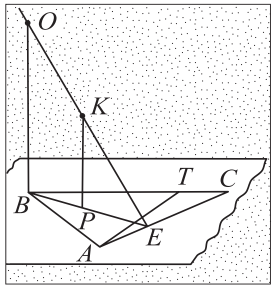
329. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамы паралелепіпед. Пункт K — пункт перасячэння яго дыяганалей, а пункт O — пункт перасячэння дыяганалей асновы (рыс. 151, *б*). а) Ці правільна, што прамая OK перпендыкулярная плоскасці ABC? б) Дакажыце, што прамыя OK і BC перпендыкулярныя. в) Знайдзіце вугал паміж прамымі CC_1 і BD.

330. Адрэзак MA перпендыкулярны плоскасці трохвугольніка ABC, пункт O — пункт перасячэння яго медыян. На адрэзку MK (пункт K — сярэдзіна адрэзка BC) узяты пункт P такі, што $MP : PK = 2 : 1$. а) Чаму роўны вугал паміж прамымі OP і BC? б) Ці правільна, што прамыя AB і PO перпендыкулярныя?



а) *б)*

Рыс. 151



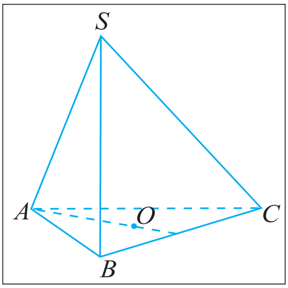
Рыс. 152

331. Адрэзак OB перпендыкулярны плоскасці трохвугольніка ABC, $OK : KE = BP : PE$ (рыс. 152). а) Дакажыце, што прамая PK перпендыкулярная плоскасці ABC. б) Ці правільна, што прамыя AT і PK перпендыкулярныя? в) Чаму роўны вугал паміж прамымі AC і PK?

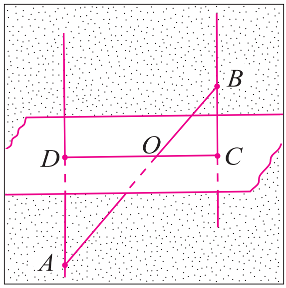
332. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ бакавы кант SB перпендыкулярны плоскасці асновы. Прамая l праходзіць праз пункт перасячэння медыян грані SAC і перпендыкулярная аснове. Пабудуйце пункт перасячэння прамой l з плоскасцю асновы.

333. $SABC$ — трохвугольная піраміда, у якой бакавы кант SB перпендыкулярны плоскасці ABC. Прамая l праходзіць праз пункт O ($O \in ABC$) і перпендыкулярная плоскасці асновы (рыс. 153). Перачарціце рысунак у сшытак і пабудуйце пункт перасячэння прамой l з плоскасцю SAC.

334. Плоскасць ABC паралельная плоскасці α. Праз пункты A, B і C праведзены прамыя, якія перпендыкулярныя плоскасці α і перасякаюць яе ў пунктах A_1, B_1 і C_1 адпаведна. Дакажыце, што трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя.



Рыс. 153



Рыс. 154

335. Адрэзак AB не мае агульных пунктаў з плоскасцю α. Праз пункты A і B праведзены прамыя, якія перпендыкулярныя плоскасці і перасякаюць яе ў пунктах A_1 і B_1 адпаведна. Вылічыце даўжыню адрэзка A_1B_1, калі $AB = 13$ см, $AA_1 = 12$ см і $BB_1 = 24$ см.

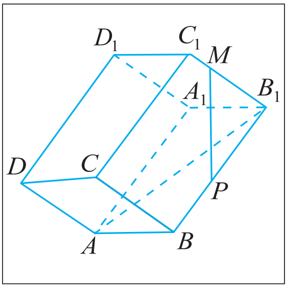
336. Адрэзак AB перасякае плоскасць α у пункце O. Прамыя AD і BC, перпендыкулярныя гэтай плоскасці, перасякаюць яе ў пунктах D і C адпаведна (рыс. 154). а) Ці правільна, што прамыя AD і BC паралельныя? б) Дакажыце, што пункты D, O і C ляжаць на адной прамой, і вылічыце даўжыню адрэзка AB, калі $AD = 12$ см, $BC = 4$ см, $OC = 3$ см.

337. На прамых a і b, якія перпендыкулярныя плоскасці α і перасякаюць яе ў пунктах A і B, узяты адпаведна пункты C і D так, што $CA = 9$ см, $DB = 15$ см. Вылічыце даўжыню адрэзка CD, калі $AB = 8$ см.

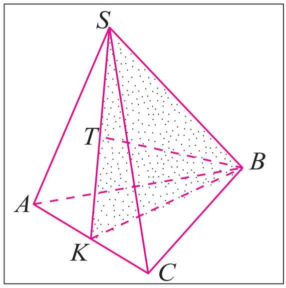
338. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед. Пункт O — сярэдзіна канта CC_1, а пункт M ляжыць на канце AA_1 так, што $AM : AA_1 = 1 : 3$. Вылічыце даўжыню адрэзка MO, калі даўжыня дыяганалі паралелепіпеда роўна 13 см, а дыяганалі асновы роўны 5 см.

339. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед. Пункты M і P належаць кантам B_1C_1 і BB_1 (рыс. 155). а) Дакажыце, што прамая BC перпендыкулярная плоскасці, у якой ляжыць грань AA_1B_1B. б) Ці правільна, што прамая MP перпендыкулярная прамой AD? в) Знайдзіце вугал паміж прамымі B_1C і DC.

340. $SABC$ — трохвугольная піраміда, у якой $AB \perp SB$, $AB \perp BC$, $SB \perp BC$. а) Дакажыце, што прамая BC перпендыкулярная плоскасці SAB. б) Ці правільна, што медыяна CK трохвугольніка SBC перпендыкулярная прамой AB?



Рыс. 155



Рыс. 156

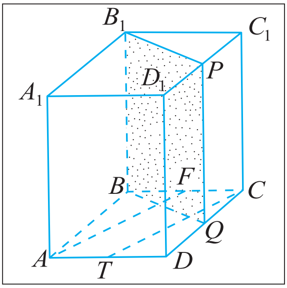
341. $SABC$ — правільная трохвугольная піраміда, пункт K — сярэдзіна канта AC (рыс. 156). а) Дакажыце, што прамая AC перпендыкулярная плоскасці SKB. б) Ці правільна, што прамыя AC і SB перпендыкулярныя? в) Знайдзіце вугал паміж прамой AC і прамой, на якой ляжыць медыяна BT трохвугольніка SKB.

342. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, дыяганалі асновы якой перасякаюцца ў пункце O. а) Дакажыце, што прамая SO перпендыкулярная плоскасці асновы дадзенай піраміды. б) Чаму роўны вугал паміж прамымі SO і CD?

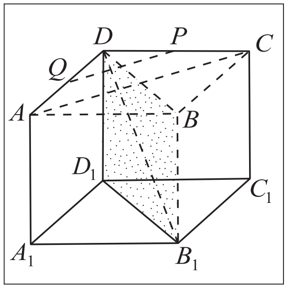
343. Пункт O — сярэдзіна канта CB тэтраэдра $SABC$. Пабудуйце сячэнне дадзенага тэтраэдра плоскасцю, якая праходзіць праз пункт O і паралельная прамым AC і SB. Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, калі кант тэтраэдра роўны a.

344. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед, аснова якога — квадрат. Пункты P, Q, F і T з'яўляюцца сярэдзінамі яго кантаў (рыс. 157). а) Дакажыце, што прамая CT перпендыкулярная плоскасці сячэння BB_1PQ. б) Чаму роўны вугал паміж прамымі TC і BP? в) Ці правільна, што прамая AF перпендыкулярная плоскасці сячэння BB_1PQ?

345. Пункт P — сярэдзіна канта AD прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, аснова якога — квадрат $ABCD$. Знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт P і перпендыкулярная прамой BD, калі $AD = a$, $AA_1 = b$.



Рыс. 157



Рыс. 158

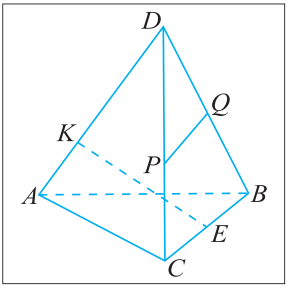
346. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед, аснова якога — квадрат $ABCD$. Пункты P і Q — сярэдзіны кантаў DC і DA адпаведна (рыс. 158). а) Дакажыце, што плоскасць сячэння BDD_1B_1 перпендыкулярная прамой AC. б) Чаму прамая B_1D перпендыкулярная прамой AC? в) Ці правільна, што прамая PQ перпендыкулярная плоскасці сячэння BDD_1B_1?

347. Пабудуйце сячэнне тэтраэдра $ABCD$ плоскасцю, якая перпендыкулярная канту AB і праходзіць праз сярэдзіну гэтага канта. Вылічыце плошчу гэтага сячэння, калі $AB = 4$ см.

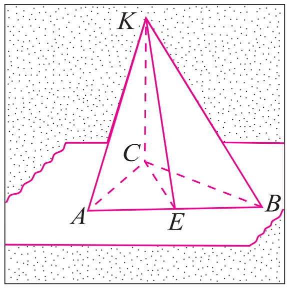
348. $ABCD$ — тэтраэдр, пункты P, Q і E — сярэдзіны яго кантаў (рыс. 159). а) Дакажыце, што прамыя PQ і AD перпендыкулярныя. б) Ці правільна, што прамая EK (K належыць канту AD) перпендыкулярная прамой PQ? в) Знайдзіце вугал паміж прамымі AE і PQ.

349. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з'яўляецца прамавугольнік $ABCD$. Вылічыце даўжыню яго бакавога канта, калі $AB = 3$ см, $BC = 4$ см і $B_1D = 5\sqrt{2}$ см.

350. У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle ACB = 90°$, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, CE — яго медыяна. Прамая CK перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка ABC. Вылічыце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка KCE, калі $CK = 6$ см (рыс. 160).



Рыс. 159



Рыс. 160

351. У трохвугольніку ABC адрэзак BT з'яўляецца яго вышынёй. Адрэзак BF перпендыкулярны прамым AB і BC. Знайдзіце вугал паміж прамымі FT і PK, дзе пункты P і K — сярэдзіны адрэзкаў AB і BC адпаведна.

352. Адрэзак BK перпендыкулярны плоскасці трохвугольніка ABC. Вылічыце даўжыню гэтага адрэзка, калі $AK = 13$ см, $KC = 15$ см, а $BC - AB = 4$ см.

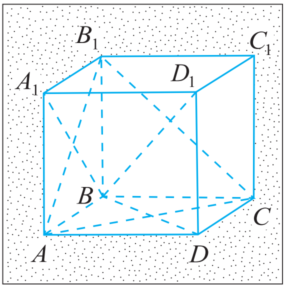
353. Бакавы кант SB трохвугольнай пірамiды $SABC$ перпендыкулярны плоскасці яе асновы. Вылічыце даўжыню гэтага канта, калі $AB = 9$ см, $BC = 16$ см і $SC : SA = 4 : 3$.

354. Дакажыце, што калі дзве плоскасці перпендыкулярныя адной і той жа прамой, то яны паралельныя.

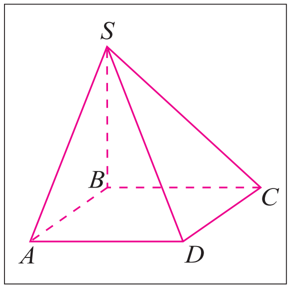
355. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з'яўляецца квадрат $ABCD$. Пункт K ляжыць на адрэзку AC так, што $AK : KC = 1 : 3$. Вылічыце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой AC, калі $AD = 4$ см, $AC_1 = 4\sqrt{6}$ см.

356. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рыс. 161). а) Ці правільна, што прамыя BD_1 і AC перпендыкулярныя? б) Дакажыце,

што прамыя BD_1 і AB_1 перпендыкулярныя. в) Дакажыце, што прамая BD_1 перпендыкулярная плоскасці AB_1C.



Рыс. 161



Рыс. 162

357. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед, асновай якога з'яўляецца квадрат $ABCD$. Вылічыце плошчу бакавой паверхні чатырохвугольнай піраміды B_1ABCD, калі $AB = 2$ см, $AC_1 = 2\sqrt{6}$ см.

358. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $SABC$ бакавыя канты ўзаемна перпендыкулярныя ($SC \perp SA$, $SC \perp SB$, $SA \perp SB$). Праз пункт O, узяты на канце AC, пабудавана сячэнне піраміды, перпендыкулярнае прамой SC. Вылічыце даўжыню бакавога канта піраміды, калі плошча сячэння роўна 32 см^2, а $SO = 10$ см.

359. Бакавы кант SB чатырохвугольнай піраміды $SABCD$, аснова якой — квадрат $ABCD$, перпендыкулярны плоскасці асновы (рыс. 162). а) Дакажыце, што прамая AD перпендыкулярная плоскасці SBA. б) Ці правільна, што прамыя SC і CD перпендыкулярныя? в) Вылічыце даўжыню канта SB, калі плошча бакавой паверхні піраміды роўна 27 см^2, а $CD = 3$ см.

360. У прамавугольніку $ABCD$ $AB = 3$ см, $AD = 4$ см. Да плоскасці прамавугольніка праведзены перпендыкулярныя адрэзкі BB_1 і CC_1 так, што адрэзак B_1C_1 не перасякае плоскасць, у якой ляжыць прамавугольнік. Вылічыце даўжыню адрэзка B_1C_1, калі $AC_1 = \sqrt{41}$ см, $B_1D = \sqrt{74}$ см.

361. $SABC$ — правільная трохвугольная піраміда. Пункт O — пункт перасячэння медыян трохвугольніка ABC. Дакажыце, што прамая SO перпендыкулярная плоскасці ABC.

362. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $SABC$, бакавыя канты якой узаемна перпендыкулярныя, на канце SB узяты пункт D так, што $AD = 5$ см. Праекцыя гэтага адрэзка на плоскасць асновы паралельная прамой SC роўна $\sqrt{26}$ см. Вылічыце даўжыню бакавога канта піраміды.

363. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $SABC$ праведзены два сячэнні: адно — праз вяршыні A і B, перпендыкулярнае прамой SC, а другое — праз вяршыню B і пункт E, які дзеліць кант AC на адрэзкі $AE = 8$ см і $EC = 7$ см, паралельнае прамой SC. Вылічыце даўжыню адрэзка, па якім перасякаюцца гэтыя сячэнні, калі $SA = 12$ см.

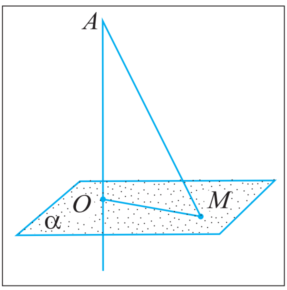
364. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $SABC$ з вяршыні C і з пункта D, які дзеліць кант AC на адрэзкі $AD = 15$ см і $DC = 10$ см, праведзены перпендыкуляры да грані SAB. Вылічыце даўжыню кожнага перпендыкуляра, калі адлегласць паміж іх асновамі роўна 6 см.

365. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта BB_1 і перпендыкулярная прамой BD_1. Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, калі даўжыня канта куба роўна a.

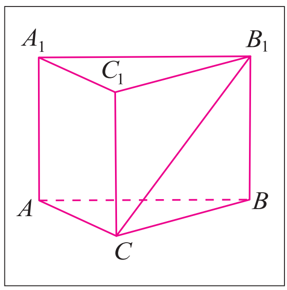
366. Праз цэнтр асновы правільнай трохвугольнай піраміды паралельна двум яе кантам, якія не перасякаюцца, праведзена плоскасць. Знайдзіце плошчу атрыманага сячэння, калі даўжыня бакавога канта піраміды роўна a, а стораны асновы роўны b.

§ 2. Перпендыкуляр і нахіленая. Адлегласць ад пункта да плоскасці

1. Перпендыкуляр і нахіленая. Няхай пункт A не ляжыць на плоскасці α. Правядзём праз пункт A прамую, перпендыкулярную плоскасці α, і абазначым літарай O пункт перасячэння гэтай прамой з плоскасцю α (рыс. 163, *а*). *Перпендыкулярам, праведзеным з пункта A да плоскасці* α, называецца адрэзак AO, пункт O называецца *асновай перпендыкуляра*. Калі AO — перпендыкуляр да плоскасці α, а M — адвольны пункт гэтай плоскасці, які не супадае з пунктам O, то адрэзак AM называецца *нахіленай*, праведзенай з пункта A да плоскасці α, а пункт M — *асновай* нахіленай. Адрэзак OM — *артаганальная праекцыя* (або, карацей, *праекцыя*) нахіленай AM на плоскасць α.



а)



б)

Рыс. 163

Напрыклад, калі $ABCA_1B_1C_1$ — прамая трохвугольная прызма, то перпендыкуляр, праведзены з пункта B_1 да плоскасці яе асновы ABC, ёсць кант B_1B, адрэзак CB — праекцыя нахіленай B_1C на плоскасць ABC (рыс. 163, *б*).

2. Тэарэма аб трох перпендыкулярах. Дакажам тэарэму, якая адыгрывае важную ролю пры рашэнні многіх задач.

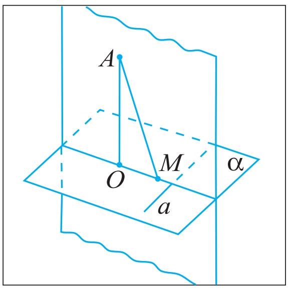
Тэарэма 1 (*аб трох перпендыкулярах*). ***Прамая, праведзеная ў плоскасці і перпендыкулярная праекцыі нахіленай на гэту плоскасць, перпендыкулярная і самой нахіленай.***

Доказ.

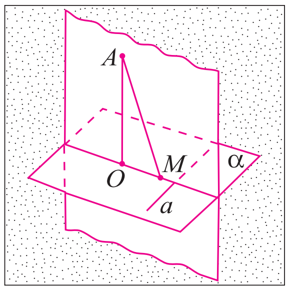
Няхай AO і AM — адпаведна перпендыкуляр і нахіленая да плоскасці α, a — прамая, праведзеная ў плоскасці α і перпендыкулярная праекцыі OM (рыс. 164, *а*, *б*). Дакажам, што $a \perp AM$.

Прамая a перпендыкулярная плоскасці OAM, паколькі яна перпендыкулярная дзвюм прамым OA і OM, якія ляжаць у гэтай плоскасці і перасякаюцца ($a \perp OM$ па ўмове, $a \perp AO$, паколькі $AO \perp \alpha$). Значыць, прамая a перпендыкулярная любой прамой, якая ляжыць у плоскасці AOM, г. зн. $a \perp AM$.

Тэарэма даказана.



а)



б)

Рыс. 164

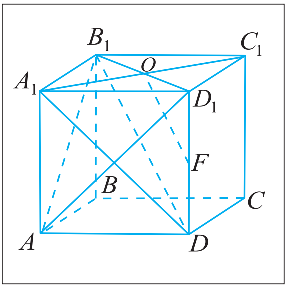
Тэарэма 2. ***Прамая, праведзеная ў плоскасці і перпендыкулярная нахіленай, перпендыкулярная і яе праекцыі на гэту плоскасць.***

Доказ.

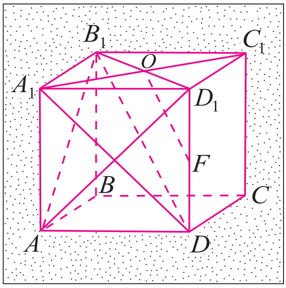
Няхай AO і AM — адпаведна перпендыкуляр і нахіленая, праведзеныя з пункта A да плоскасці α, прамая a ляжыць у плоскасці α і перпендыкулярная нахіленай AM (гл. рыс. 164, *а*, *б*). Дакажам, што прамая a перпендыкулярная праекцыі OM. Прамая a перпендыкулярная плоскасці OAM, паколькі яна перпендыкулярная дзвюм прамым OA і AM, якія ляжаць у гэтай плоскасці і перасякаюцца ($a \perp AM$ па ўмове, $a \perp OA$, паколькі $OA \perp \alpha$). Адсюль вынікае, што прамая a перпендыкулярная кожнай прамой, якая ляжыць у плоскасці AOM, у прыватнасці $a \perp OM$.

Тэарэма даказана.

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, пункт O — пункт перасячэння дыяганалей грані $A_1B_1C_1D_1$, а F — сярэдзіна канта DD_1. Дакажыце, што $OF \perp AD_1$.



а)



б)

Рыс. 165

Дадзена:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $DF = FD_1$, $O = A_1C_1 \cap B_1D_1$.

Даказаць:
$OF \perp AD_1$.

Доказ.

1) A_1D — праекцыя B_1D на плоскасць A_1AD і $A_1D \perp AD_1$. Значыць, па тэарэме аб трох перпендыкулярах $B_1D \perp AD_1$.

2) $OF \parallel B_1D$ (паколькі OF — сярэдняя лінія трохвугольніка B_1D_1D), значыць, $OF \perp AD_1$ (рыс. 165, *а*, *б*).

Тэарэма 3. ***Калі з аднаго пункта, які не належыць плоскасці, да гэтай плоскасці праведзены перпендыкуляр і дзве нахіленыя, то:***

1) дзве нахіленыя, якія маюць роўныя праекцыі, роўныя;

2) з дзвюх нахіленых большая тая, праекцыя якой большая.

Доказ.

Няхай AO — перпендыкуляр да плоскасці α, AB і AC — нахіленыя да гэтай плоскасці (рыс. 166, *а*). Па ўмове $AO \perp \alpha$, значыць, $AO \perp OB$ і $AO \perp OC$. З прамавугольных трохвугольнікаў AOB і AOC знойдзем $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2}$, $AC = \sqrt{AO^2 + OC^2}$. Адсюль:

1) калі $OB = OC$, то $AB = AC$;

2) калі $OB < OC$, то $AB < AC$.

Тэарэма даказана.

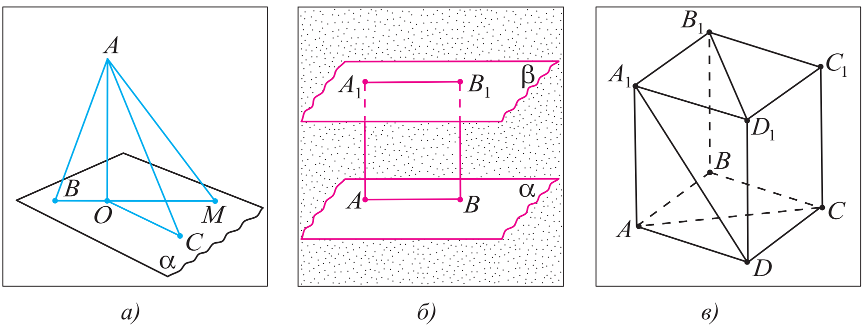
Няхай AO і AM — адпаведна перпендыкуляр і нахіленая, праведзеныя з пункта A да плоскасці α (гл. рыс. 166, *а*). У прамавугольным трохвугольніку AOM старана AO з'яўляецца катэтам, а старана AM — гіпатэнузай, значыць,

$AO < AM$. Такім чынам, перпендыкуляр, праведзены з пункта да плоскасці, меншы за любую нахіленую, праведзеную з таго ж пункта да дадзенай плоскасці.

Значыць, з усіх адлегласцей ад пункта A да розных пунктаў плоскасці α найменшай з'яўляецца адлегласць да асновы O перпендыкуляра, праведзенага з пункта A да плоскасці α.

Азначэнне. Адлегласцю ад пункта да плоскасці называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з гэтага пункта да дадзенай плоскасці.

Адлегласць ад пункта A да плоскасці α абазначаецца d (A, α) (чытаюць: «Адлегласць ад пункта A да плоскасці α»).



Рыс. 166

Няхай α і β — паралельныя плоскасці. З любых пунктаў A і B плоскасці α правядзём да плоскасці β перпендыкуляры AA_1 і BB_1 (рыс. 166, *б*). Паколькі $AA_1 \perp \beta$ і $BB_1 \perp \beta$, то $AA_1 \parallel BB_1$. Адрэзкі паралельных прамых, змешчаныя паміж паралельнымі плоскасцямі, роўныя, значыць, $AA_1 = BB_1$. Адсюль вынікае, што ўсе пункты плоскасці α знаходзяцца на адной і той жа адлегласці ад плоскасці β. Аналагічна, усе пункты плоскасці β знаходзяцца на той жа адлегласці ад плоскасці α.

Азначэнне. Адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі называецца адлегласць ад адвольнага пункта адной з паралельных плоскасцей да другой плоскасці.

Адлегласць паміж паралельнымі плоскасцямі α і β абазначаецца d (α, β) (чытаюць: «Адлегласць паміж плоскасцямі α і β»).

Аналагічна, кожны пункт прамой, паралельнай некаторай плоскасці, знаходзіцца на адной і той жа адлегласці ад гэтай плоскасці.

Азначэнне. **Адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю называецца адлегласць ад адвольнага пункта прамой да плоскасці.**

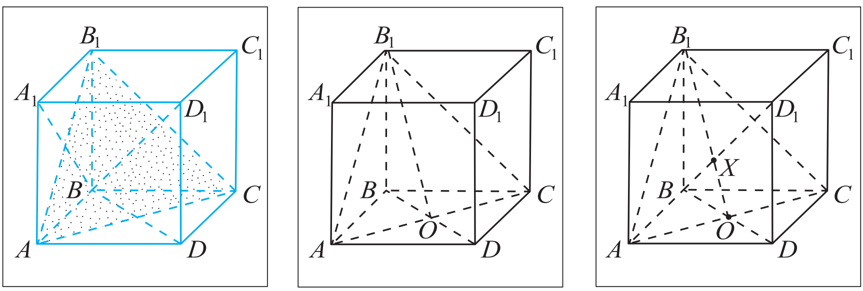
Адлегласць паміж прамой l і паралельнай ёй плоскасцю α абазначаецца $d\ (l,\ \alpha)$ (чытаюць: «Адлегласць паміж прамой l і плоскасцю α»).

Калі дзве прамыя скрыжаваныя, то праз кожную з іх праходзіць адзіная плоскасць, паралельная другой.

Азначэнне. **Адлегласцю паміж скрыжаванымі прамымі называецца адлегласць ад адной са скрыжаваных прамых да плоскасці, якая праходзіць праз другую прамую і паралельная першай прамой.**

Адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі a і b абазначаецца $d\ (a,\ b)$ (чытаюць: «Адлегласць паміж прамымі a і b»).

Напрыклад, у прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ адлегласць паміж паралельнымі плоскасцямі, у якіх ляжаць грані AA_1B_1B і DD_1C_1C, роўна даўжыні канта AD, паколькі AD перпендыкулярная кожнай з названых плоскасцей. Адлегласць ад прамой A_1D да паралельнай ёй плоскасці BCC_1 роўна даўжыні канта DC (рыс. 166, *в*).



а) *б)* *в)*

Рыс. 167

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Пабудуйце аснову перпендыкуляра, праведзенага з пункта D_1 да плоскасці AB_1C.

Рашэнне.

1) Заўважым, што A_1B — праекцыя D_1B на плоскасць грані AA_1B_1B і $AB_1 \perp A_1B$, значыць, па тэарэме аб трох перпен-

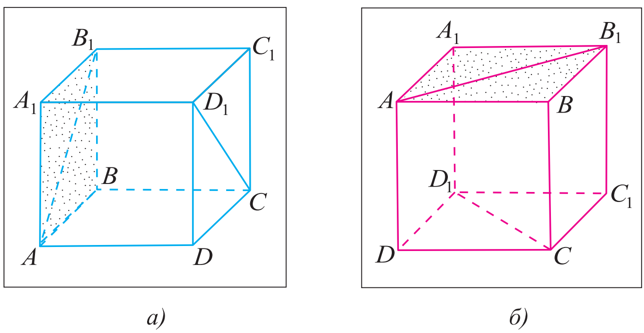
дыкулярах $AB_1 \perp D_1B$. Аналагічна, DB — праекцыя D_1B на плоскасць грані $ABCD$ і $DB \perp AC$, значыць, $AC \perp D_1B$. Такім чынам, прамая D_1B перпендыкулярная дзвюм прамым B_1A і AC, якія ляжаць у плоскасці AB_1C і перасякаюцца, значыць, прамая D_1B перпендыкулярная плоскасці AB_1C (рыс. 167, *а*).

2) Паколькі $D_1B \perp (AB_1C)$, то шуканая аснова перпендыкуляра ёсць пункт перасячэння прамой D_1B з плоскасцю AB_1C (гл. рыс. 167, *а*).

3) Будуем пункт $O = AC \cap BD$ (рыс. 167, *б*).

4) Пункт $X = D_1B \cap B_1O$ — шуканая аснова перпендыкуляра (пункт X ляжыць у плоскасці AB_1C, паколькі яна ляжыць на прамой B_1O (рыс. 167, *в*)).

Задача 3. Дадзены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі AB_1 і CD_1, калі даўжыня канта куба роўна a.



Рыс. 168

Рашэнне.

1) Разгледзім плоскасць, якая праходзіць праз прамую AB_1 і паралельная прамой CD_1. Такой плоскасцю з'яўляецца плоскасць α, у якой ляжыць грань AA_1B_1B ($A_1B \subset \alpha$, $CD_1 \parallel A_1B$, значыць, $CD_1 \parallel \alpha$) (рыс. 168, *а*, *б*).

2) Адлегласць паміж прамымі CD_1 і AB_1 ёсць адлегласць ад любога пункта прамой CD_1 да плоскасці α. Адрэзак D_1A_1 — перпендыкуляр, праведзены з пункта D_1 да плоскасці α ($D_1A_1 \perp A_1B_1$, $D_1A_1 \perp AA_1$, значыць, $D_1A_1 \perp (AA_1B_1)$), такім чынам, яго даўжыня a роўна адлегласці паміж прамымі AB_1 і CD_1. Адказ: $d\,(AB_1, CD_1) = a$.

Пытанні і задачы да § 2

367. Прамая a — артаганальная праекцыя прамой b на плоскасць α, прамая l ляжыць у плоскасці α і перпендыкулярная прамой a. Ці правільнае сцверджанне, што прамая l перпендыкулярная прамой b?

368. Прамая p ляжыць у плоскасці β і перпендыкулярная прамой b. Якое ўзаемнае размяшчэнне прамой p і артаганальнай праекцыі прамой b на плоскасць β?

369. Пункт P ляжыць на прамой l, якая праходзіць праз цэнтр акружнасці і перпендыкулярная плоскасці, у якой гэта акружнасць ляжыць. Пункты A і B ляжаць на дадзенай акружнасці. Ці правільна, што адрэзкі PA і PB роўныя паміж сабой?

370. Прамыя a і b — скрыжаваныя. Плоскасць α праходзіць праз прамую b і паралельная прамой a, пункт O — адвольны пункт прамой a, OF — перпендыкуляр, праведзены з пункта O да плоскасці α. Ці правільна, што адлегласць паміж прамымі a і b роўна даўжыні адрэзка OF?

371. З пункта A да плоскасці α праведзены перпендыкуляр AO, даўжыня якога роўна 4 см, і нахіленая $AC = 7$ см. Вылічыце даўжыню праекцыі нахіленай AC на плоскасць α.

372. З аднаго і таго ж пункта пад вуглом φ адзін да аднаго праведзены перпендыкуляр і нахіленая, даўжыня якой роўна a. Знайдзіце даўжыню праекцыі нахіленай.

373. Асновай прамой прызмы $ABCA_1B_1C_1$ з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік з прамым вуглом пры вяршыні C (рыс. 169, *а*). а) Назавіце праекцыю адрэзка CB_1 на плоскасць $A_1B_1C_1$. б) Ці правільна, што адрэзак CB_1 — артаганальная праекцыя адрэзка AB_1 на плоскасць грані CC_1B_1B?

374. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рыс. 169, *б*). а) Ці правільна, што праекцыя дыяганалі B_1D на плоскасць грані AA_1D_1D ёсць адрэзак A_1D? б) Знайдзіце даўжыню праекцыі адрэзка A_1D на плоскасць BDD_1, калі даўжыня канта куба роўна a.

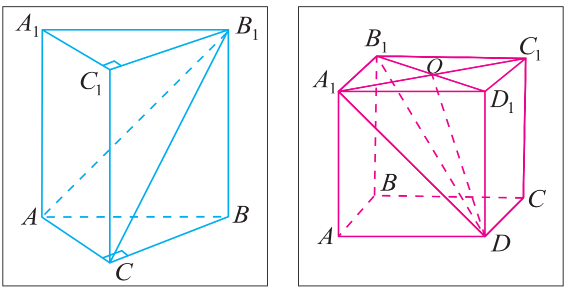
375. Адрэзак SO — перпендыкуляр, праведзены з пункта S да плоскасці, у якой ляжыць трохвугольнік ABC. Вядома,

што $SA = SB = SC$. Дакажыце, што пункт O ёсць цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC.

376. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ бакавы кант SA перпендыкулярны плоскасці асновы, адрэзак AF — вышыня трохвугольніка ABC. Дакажыце, што SF ёсць вышыня трохвугольніка SBC.

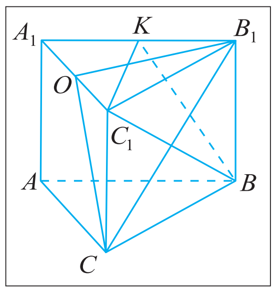
377. Прамая OB перпендыкулярная плоскасці квадрата $ABCD$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка OAD, калі $OB = 8$ см, $AB = 6$ см.

378. Даўжыня бакавога канта правільнай трохвугольнай піраміды $SABC$ роўна 8 см. Вылічыце адлегласць ад вяршыні S да плоскасці асновы ABC, калі $AB = 12$ см.



а) б)

Рыс. 169



Рыс. 170

379. $ABCA_1B_1C_1$ — правільная трохвугольная прызма, пункты K і O — сярэдзіны кантаў A_1B_1 і A_1C_1 адпаведна (рыс. 170). а) Ці правільна, што CO — праекцыя CB_1 на плоскасць грані AA_1C_1C? б) Вылічыце плошчу трохвугольніка BC_1K, калі $BC = 6$ см, $AA_1 = \sqrt{15}$ см.

380. Аснова трохвугольнай піраміды $SABC$ — прамавугольны трохвугольнік ABC, у якім $\angle ACB = 90°$, $\angle CAB = 30°$. Вылічыце вышыню грані ASB, праведзенай з вяршыні S, калі даўжыня бакавога канта SC, перпендыкулярнага плоскасці асновы, роўна 4 см, а $AC = 6$ см.

381. Праз вяршыню A прамавугольнага трохвугольніка ABC ($\angle ACB = 90°$) праведзена прамая AO, перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка. Вылічыце плошчу трохвугольніка BCO, калі $BC = 2$ см, $CO = 2\sqrt{3}$ см.

382. З пункта O праведзены перпендыкуляр OA да плоскасці прамавугольніка $ABCD$. Знайдзіце адлегласць ад пункта O да плоскасці дадзенага прамавугольніка, калі $AD = b$, $DC = a$, а плошча трохвугольніка ODC роўна S.

383. Аснова трохвугольнай піраміды $SABC$ — раўнабедраны трохвугольнік ABC, а бакавы кант SA перпендыкулярны плоскасці асновы. Вылічыце плошчу грані SBC, калі $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см, $AS = 24$ см.

384. Бакавы кант SA чатырохвугольнай піраміды $SABCD$, аснова якой — прамавугольнік $ABCD$, перпендыкулярны плоскасці асновы. Вылічыце даўжыню канта SA, калі $SD = 12$ см, $SC = 18$ см, $SB = 14$ см.

385. У раўнабедраным трохвугольніку ABC $AC = BC = 2$ см, $\angle ABC = 30°$. Прамая OB перпендыкулярная плоскасці дадзенага трохвугольніка. Вылічыце адлегласць ад пункта O да прамой AC і адлегласць ад пункта B да плоскасці AOC, калі $OB = 1$ см.

386. Праз вяршыню A квадрата $ABCD$ праведзена прамая AO, перпендыкулярная яго плоскасці. Вылічыце адлегласць ад пункта O да прамых DB, BC і DC, калі $OA = 16$ см, $AB = 8$ см.

387. Аснова трохвугольнай піраміды $SABC$ — раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік ABC ($\angle ACB = 90°$). Бакавы кант SC перпендыкулярны плоскасці асновы. Вылічыце плошчу бакавой паверхні піраміды, калі $AC = 4$ см, $SC = 2$ см.

388. Катэт прамавугольнага трохвугольніка ABC роўны a, а вугал, прылеглы да гэтага катэта, роўны α. Праз вяршыню прамога вугла C праведзена прамая CD, перпендыкулярная плоскасці гэтага трохвугольніка. Знайдзіце плошчу трохвугольніка DAB, калі $DC = b$.

389. Прамая OS перпендыкулярная плоскасці ромба $ABCD$, дыяганалі якога перасякаюцца ў пункце O. Дакажыце, што адлегласці ад пункта S да прамых, якія змяшчаюць стораны ромба, роўныя, і знайдзіце гэту адлегласць, калі $SO = a\sqrt{2}$, $AC = 2a$, $BD = a$.

390. Аснова чатырохвугольнай піраміды $OABCD$ — ромб $ABCD$, у якога $\angle ABC = 60°$, $AB = a$. Бакавы кант OA піраміды перпендыкулярны плоскасці асновы. Знайдзіце даў-

жыню канта OA і адлегласць ад пункта A да плоскасці ODC, калі плошча грані ODC роўна S.

391. Праз вяршыню B тупога вугла паралелаграма $ABCD$ праведзена прамая BM, перпендыкулярная яго плоскасці. Вылічыце даўжыні старон паралелаграма, калі $AM = 3\sqrt{5}$ см, $MD = MC = 5$ см, $AC = 2\sqrt{22}$ см.

392. З пункта A да плоскасці α праведзены перпендыкуляр AB і нахіленыя AC і AD, праекцыі якіх утвараюць паміж сабой прамы вугал. Вылічыце вышыню CK трохвугольніка ACD, калі $AB = 15$ см, $BC = 16$ см, $BD = 20$ см.

393. Дадзены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вылічыце адлегласць паміж прамымі B_1D і D_1C, калі даўжыня канта куба роўна 2 см.

394. Дыяганалі паралелаграма $ABCD$ перасякаюцца ў пункце O, а прамая MO перпендыкулярная плоскасці дадзенага паралелаграма. Вылічыце вышыні паралелаграма, калі даўжыні яго старон роўны 20 см і 50 см, а адлегласці ад пункта M да прамых, якія змяшчаюць стораны паралелаграма, роўны 17 см і 25 см.

395. Плоскасць α праходзіць праз вяршыню A трохвугольніка ABC і паралельная прамой BC. Адрэзкі BB_1 і CC_1 — перпендыкуляры да плоскасці α. Вылічыце плошчу трохвугольніка ABC, калі $AB_1 = \sqrt{2}$ см, $AC_1 = \sqrt{3}$ см, $B_1C_1 = \sqrt{5}$ см, а адлегласць ад прамой BC да плоскасці α роўна 3 см.

396. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ бакавы кант SB перпендыкулярны плоскасці асновы піраміды. Вылічыце вышыню SD трохвугольніка SAC, калі $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, $AC = 21$ см, $SB = 15$ см.

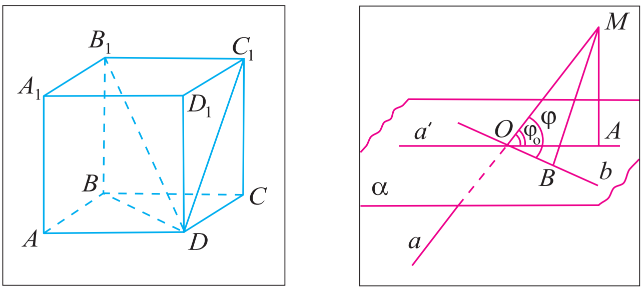
397. У раўнабедраным трохвугольніку ABC аснова $AB = 6$ см, а бакавая старана $BC = 5$ см. Адрэзак OK перпендыкулярны плоскасці трохвугольніка (дзе пункт O — цэнтр акружнасці, упісанай у дадзены трохвугольнік). Вылічыце вышыню трохвугольніка AKB, праведзеную з вяршыні K, калі $OK = 2$ см.

398. У раўнабедраным трохвугольніку ABC аснова $AC = 6$ см, а вышыня $BD = 9$ см. Пункт M роўнааддалены ад усіх вяршынь дадзенага трохвугольніка і знаходзіцца на адлегласці 3 см ад плоскасці, у якой ён ляжыць. Вылічыце адлегласць ад пункта M да вяршыні C трохвугольніка.

§ 3. Вугал паміж прамой і плоскасцю

1. Артаганальная праекцыя прамой. Няхай у прасторы дадзены плоскасць α і прамая a. *Артаганальнай праекцыяй* прамой a на плоскасць α называецца праекцыя гэтай прамой на плоскасць α у выпадку, калі прамая, што вызначае напрамак праектавання, перпендыкулярная плоскасці α.

Напрыклад, калі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, тады артаганальнай праекцыяй прамой B_1D на плоскасць грані DCC_1D_1 з'яўляецца прамая DC_1, а артаганальная праекцыя гэтай прамой на плоскасць асновы $ABCD$ куба ёсць прамая BD (рыс. 171, *а*).



а) *б)*

Рыс. 171

Дадзім азначэнне вугла паміж прамой і плоскасцю, пры гэтым выкарыстаем паняцце артаганальнай праекцыі прамой на плоскасць.

Калі прамая перпендыкулярная плоскасці, то яе артаганальная праекцыя на гэту плоскасць ёсць пункт перасячэння гэтай прамой з плоскасцю. У гэтым выпадку вугал паміж прамой і плоскасцю лічыцца роўным 90°.

2. Вугал паміж прамой і плоскасцю. Разгледзім паняцце вугла паміж прамой і плоскасцю.

Азначэнне. Вуглом паміж прамой, не перпендыкулярнай плоскасці, і плоскасцю называецца вугал паміж прамой і яе артаганальнай праекцыяй на дадзеную плоскасць.

Тэарэма. ***Вугал паміж прамой і плоскасцю з'яўляецца найменшым з усіх вуглоў, якія дадзеная прамая ўтва-***

рае з прамымі, што ляжаць у дадзенай плоскасці і праходзяць праз пункт перасячэння прамой і плоскасці.

Доказ.

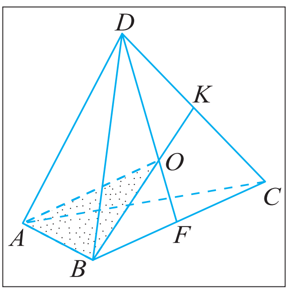
Няхай прамая a перасякае плоскасць α у пункце O, a' — артаганальная праекцыя прамой a на плоскасць α, b — адвольная прамая, якая ляжыць у плоскасці α, праходзіць праз пункт O і не супадае з прамой a'. Абазначым літарай φ_0 вугал паміж прамымі a і a', а літарай φ — вугал паміж прамымі a і b. Дакажам, што $\varphi_0 < \varphi$ (рыс. 171, *б*).

Калі прамыя a і b не перпендыкулярныя, то з пункта $M \in a$ правядзём перпендыкуляры MA і MB да прамых a' і b адпаведна. З прамавугольных трохвугольнікаў MAO і MBO знойдзем $\sin\varphi_0 = \frac{MA}{MO}$, $\sin\varphi = \frac{MB}{MO}$. Паколькі $MA < MB$, то $\sin\varphi_0 < \sin\varphi$. Адсюль вынікае, што $\varphi_0 < \varphi$ (паколькі $0 < \varphi \leqslant 90°$, а функцыя $y = \sin x$ на названым прамежку з'яўляецца нарастальнай).

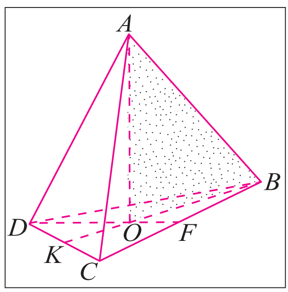
Калі $a \perp b$, то $\varphi = 90°$, а, значыць, $\varphi > \varphi_0$.

Тэарэма даказана.

Задача. Дадзены тэтраэдр $DABC$. Знайдзіце косінус вугла паміж прамой AB і плоскасцю DBC.



а)



б)

Рыс. 172

Рашэнне.

1) Вугал паміж прамой AB і плоскасцю DBC роўны вуглу паміж прамой AB і артаганальнай праекцыяй гэтай прамой на плоскасць DBC.

2) Для пабудавання артаганальнай праекцыі прамой AB на плоскасць DBC дастаткова пабудаваць аснову перпендыкуляра, праведзенага з адвольнага пункта прамой AB да плоскасці DBC (напрыклад, з пункта A).

3) Калі пункт O — аснова перпендыкуляра, праведзенага з пункта A да плоскасці DBC, то $OC = OB = OD$ (праекцыі роўных адпаведна нахіленых AC, AB, AD). Значыць, пункт O роўнааддалены ад вяршынь трохвугольніка DBC, а такім пунктам у роўнастароннім трохвугольніку DBC з'яўляецца пункт перасячэння медыян BK і DF. Такім чынам, прамая BO — перпендыкулярная праекцыя прамой AB на плоскасць DBC (рыс. 172, *а*, *б*).

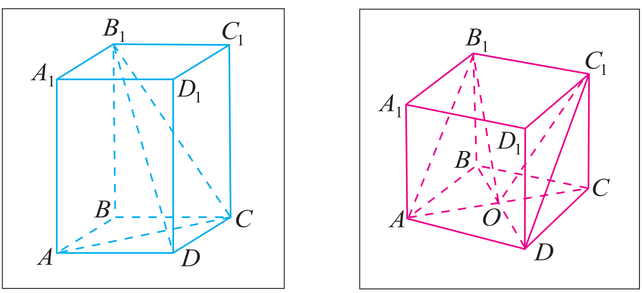
4) Цяпер знойдзем косінус вугла паміж прамой AB і плоскасцю DBC. Няхай кант тэтраэдра роўны a. У прамавугольным трохвугольніку AOB $\left(AB = a,\ \angle AOB = 90°,\ BO = \frac{2}{3}BK = \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$ $\cos \angle ABO = \frac{OB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{3} : a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Адказ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задачы да § 3

399. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед (рыс. 173, *а*). а) Ці правільна, што прамая B_1C ёсць артаганальная праекцыя прамой B_1D на плоскасць грані BCC_1B_1? б) Якая прамая з'яўляецца артаганальнай праекцыяй прамой AC на плоскасць грані DCC_1D_1? в) Чаму вугал паміж прамымі B_1D і DC не роўны вуглу паміж прамой B_1D і плоскасцю DCC_1?

400. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дыяганалі асновы $ABCD$ перасякаюцца ў пункце O (рыс. 173, *б*). а) Назавіце артаганальную праекцыю прамой DC_1 на плоскасць дыяганальнага сячэння ACC_1A_1. б) Ці правільна, што прамая AB_1 з'яўляецца артаганальнай праекцыяй прамой B_1O на плоскасць грані ABB_1A_1?



а) *б)*

Рыс. 173

401. Дадзены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Ці правільна, што вугал паміж прамой AB_1 і плоскасцю грані BCC_1B_1 роўны $30°$? б) Знайдзіце сінус вугла паміж прамой B_1D і плоскасцю грані ADD_1A_1.

402. Адрэзак AM з'яўляецца перпендыкулярам да плоскасці квадрата $ABCD$, дыяганалі якога перасякаюцца ў пункце O. Знайдзіце сінус вугла φ паміж прамой MO і плоскасцю MAB, калі $MA = AD$.

403. Адрэзак OB перпендыкулярны плоскасці прамавугольніка $ABCD$, $AB = 3$ см, $AD = 4$ см. Вылічыце адлегласць ад пункта O да плоскасці прамавугольніка, калі вугал паміж прамой OD і плоскасцю ABC роўны $30°$.

404. Аснова чатырохвугольнай піраміды $SABCD$ — квадрат $ABCD$, бакавы кант SA піраміды перпендыкулярны плоскасці асновы. Прамая SC утварае з плоскасцю SAB вугал φ. Знайдзіце косінус вугла паміж прамой SC і плоскасцю $ABCD$, калі $DC = a$.

405. Пункт T знаходзіцца на адлегласці a ад кожнай з вяршынь квадрата $ABCD$. Знайдзіце вугал паміж прамой BT і плоскасцю дадзенага квадрата, калі $AD = a$.

406. Адрэзак BT перпендыкулярны плоскасці ромба $ABCD$, $\angle BAC = 60°$. Знайдзіце сінус вугла паміж прамой TD і плоскасцю TBC, калі вугал паміж прамой TD і плоскасцю, у якой ляжыць ромб, роўны $45°$.

407. З пункта O, які знаходзіцца на адлегласці a ад плоскасці α, да гэтай плоскасці праведзены нахіленыя OA і OB, кожная з якіх утварае з плоскасцю α вугал $30°$. Праекцыі нахіленых на плоскасць утвараюць вугал $120°$. Знайдзіце AB.

408. Аснова трохвугольнай піраміды $DABC$ — прамавугольны трохвугольнік ABC ($\angle ABC = 90°$), бакавы кант DB перпендыкулярны плоскасці яе асновы. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды, калі $DB = a$, а прамыя DA і DC утвараюць з плоскасцю асновы вуглы $30°$ і $45°$ адпаведна.

409. Аснова трохвугольнай піраміды $DABC$ — раўнабедраны трохвугольнік ABC ($AB = CB$), бакавы кант DB піраміды перпендыкулярны плоскасці яе асновы. Вылічыце рады-

ус акружнасці, упісанай у аснову пірамідьі, калі $AD = 11$ см, $AC = 10$ см, а вышыня DK грані DAC утварае з плоскасцю асновы вугал $60°$.

410. Бакавы кант SA чатырохвугольнай пірамідьі, аснова якой — прамавугольнік $ABCD$, перпендыкулярны плоскасці яе асновы. Вылічыце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка SAC, калі $SB = 2$ см, а бакавыя канты SB і SD утвараюць з плоскасцю асновы вуглы $30°$ і $45°$ адпаведна.

411. З пункта O да плоскасці α праведзены роўныя нахіленыя OA і OB, вугал паміж якімі роўны $60°$, а вугал паміж іх праекцыямі на гэту плоскасць роўны $90°$. Вылічыце вуглы паміж нахіленымі і плоскасцю α.

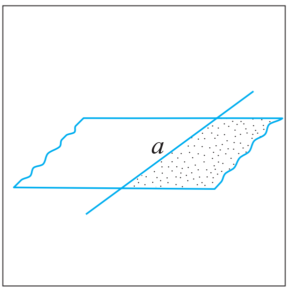
412. З некаторага пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя, якія ўтвараюць з гэтай плоскасцю вуглы $45°$ і $60°$. Вылічыце даўжыню кожнай нахіленай, калі адлегласць паміж асновамі нахіленых роўна 1 см, а вугал паміж іх праекцыямі на плоскасць роўны $30°$.

413. У раўнабедраным трохвугольніку ABC $AC = CB = 1$ см, $\angle BAC = 30°$. Адрэзак OC, даўжыня якога роўна $\sqrt{2}$ см, перпендыкулярны плоскасці ABC. Знайдзіце вугал паміж прамой OA і плоскасцю OBC.

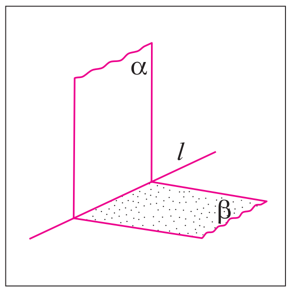
414. З пункта C да плоскасці α праведзены нахіленыя CA і CB, якія перпендыкулярныя паміж сабой і ўтвараюць з плоскасцю α вуглы $30°$ і $45°$ адпаведна. Вылічыце вугал, утвораны з плоскасцю α перпендыкулярам, праведзеным з пункта C да прамой AB.

§ 4. Двухгранны вугал. Перпендыкулярнасць плоскасцей

1. Двухгранны вугал. Няхай прамая *a* ляжыць у плоскасці, тады можна назваць дзве часткі гэтай плоскасці, кожная з якіх разам з прамой *a* называецца паўплоскасцю. Прамая *a* называецца гранічнай для кожнай з паўплоскасцей (рыс. 174, *а*). Дзве паўплоскасці з агульнай гранічнай прамой *l*, размешчаныя ў прасторы, могуць не ляжаць у адной плоскасці (рыс. 175, *б*).



а)



б)

Рыс. 174

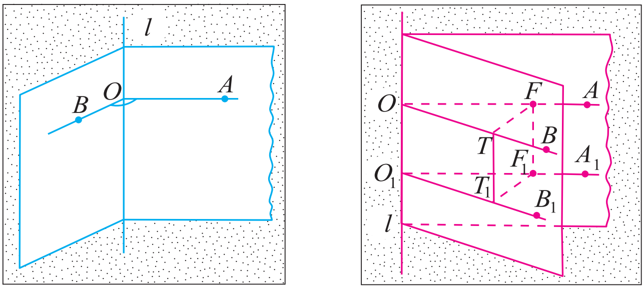
А з н а ч э н н е. **Двухгранным вуглом называецца фігура, утвораная дзвюма паўплоскасцямі з агульнай гранічнай прамой і часткай прасторы, для якой гэтыя паўплоскасці з'яўляюцца граніцай.**

Паўплоскасці называюцца *гранямі* двухграннага вугла, агульная гранічная прамая *l* паўплоскасцей называецца *кантам* двухграннага вугла (гл. рыс. 174, *б*).

Калі грані двухграннага вугла ляжаць у адной плоскасці, то ён называецца *разгорнутым*.

2. Лінейны вугал двухграннага вугла. Для вымярэння двухграннага вугла ўводзіцца паняцце яго лінейнага вугла. Няхай пункт *O* ляжыць на канце *l* двухграннага вугла (рыс. 175, *а*). У кожнай грані правядзём прамені *OA* і *OB* перпендыкулярна канту *l*. Вугал *AOB*, старанамі якога з'яўляюцца прамені *OA* і *OB*, называецца лінейным вуглом дадзенага двухграннага вугла.

Азначэнне. **Лінейным вуглом двухграннага вугла называецца вугал, старанамі якога з'яўляюцца прамені з агульным пачаткам на канце двухграннага вугла, праведзеныя ў яго гранях перпендыкулярна канту.**



а) *б)*

Рыс. 175

Няхай AOB — лінейны вугал двухграннага вугла, кант якога l (гл. рыс. 175, *а*). Паколькі $OA \perp l$, $OB \perp l$, то плоскасць, у якой ляжаць прамені OA і OB, перпендыкулярная прамой l. Такім чынам, лінейны вугал двухграннага вугла — гэта вугал, утвораны перасячэннем двухграннага вугла плоскасцю, перпендыкулярнай яго канту.

Усе лінейныя вуглы двухграннага вугла роўныя паміж сабой. Сапраўды, разгледзім два лінейныя вуглы AOB і $A_1O_1B_1$ двухграннага вугла, кант якога l. Прамені OA і O_1A_1 ляжаць у адной грані і перпендыкулярны канту l, значыць, $OA \parallel O_1A_1$. Аналагічна $OB \parallel O_1B_1$ (рыс. 175, *б*). Адкладзём на праменях OA і O_1A_1 роўныя адрэзкі OF і O_1F_1 адпаведна, а на праменях OB і O_1B_1 — роўныя адрэзкі OT і O_1T_1 адпаведна. Паколькі $OF = O_1F_1$ і $OF \parallel O_1F_1$, то чатырохвугольнік OFF_1O_1 — паралелаграм. Таму $OO_1 = FF_1$, $OO_1 \parallel FF_1$. Аналагічна, $OO_1 = TT_1$ і $OO_1 \parallel TT_1$. У выніку $FF_1 = TT_1$ і $FF_1 \parallel TT_1$, г. зн. чатырохвугольнік TFF_1T — паралелаграм. Значыць, $TF = T_1F_1$. Такім чынам, трохвугольнікі OFT і $O_1F_1T_1$ роўныя па трох старанах, значыць, $\angle FOT = \angle F_1O_1T_1$, г. зн. $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Градуснай мерай двухграннага вугла называецца градусная мера яго лінейнага вугла.

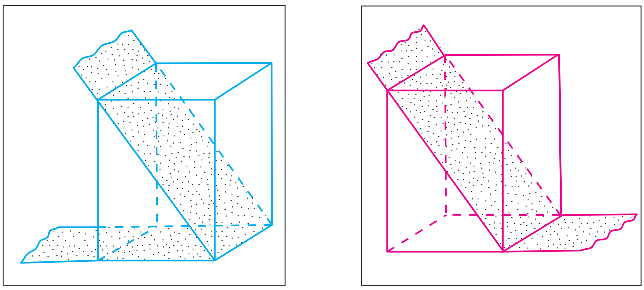
Двухгранны вугал называецца *прамым* (*вострым*, *тупым*), калі яго градусная мера роўна 90° (меншая за 90°, большая за 90°).

На рысунку 176, *а*, *б* паказаны відарысы адпаведна вострага і тупога двухгранных вуглоў.

У далейшым пад двухгранным вуглом будзем разумець заўсёды той, лінейны вугал φ якога задавальняе ўмову $0 < \varphi < 180°$.

Замест фразы «двухгранны вугал, градусная мера якога роўна α» можна гаварыць «двухгранны вугал, роўны α».

Двухгранны вугал, кантам якога з'яўляецца прамая AB, а гранямі — паўплоскасці α і β, абазначаецца $\alpha AB \beta$ (або $TABE$, калі на розных яго гранях адзначаны пункты T і E).



а) *б)*

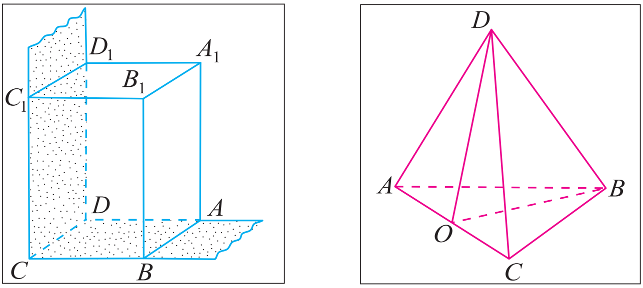
Рыс. 176

Разгледзім прыклады. Няхай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед. Тады $\angle ADD_1$ з'яўляецца лінейным вуглом двухграннага вугла, кант якога ёсць прамая DC, а яго грані — паўплоскасці, у якіх ляжаць прамавугольнікі $ABCD$ і DCC_1D_1 (паколькі $AD \perp DC$ і $DD_1 \perp DC$). Вугал ADD_1 — прамы, значыць, названы двухгранны вугал прамы (рыс. 177, *а*).

Двухгранным вуглом пры канце мнагагранніка называецца двухгранны вугал, кант якога змяшчае кант мнагагранніка, а грані двухграннага вугла змяшчаюць грані мнагагранніка, якія перасякаюцца па дадзеным канце мнагагранніка.

Няхай $DABC$ — правільная трохвугольная піраміда, а пункт O — сярэдзіна адрэзка AC. Вугал DOB ёсць лінейны вугал двухграннага вугла $DACB$, кантам якога з'яўляец-

ца прамая AC, а гранямі — паўплоскасці, якія змяшчаюць трохвугольнікі ABC і ACD (паколькі $DO \perp AC$ і $BO \perp AC$) (рыс. 177, *б*).



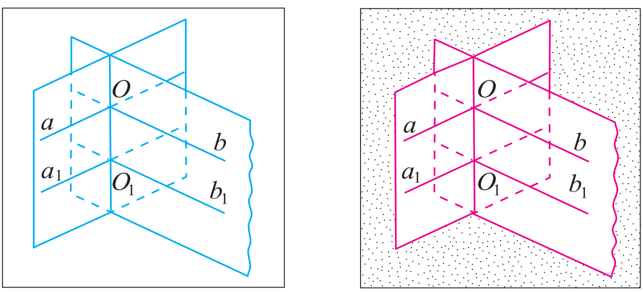
а) *б)*

Рыс. 177

3. Вугал паміж плоскасцямі. Увядзём паняцце вугла паміж плоскасцямі.

Азначэнне. **Вуглом паміж плоскасцямі, якія перасякаюцца, называецца вугал паміж прамымі, праведзенымі адпаведна ў плоскасцях перпендыкулярна іх лініі перасячэння праз некаторы яе пункт.**

Заўважым, што вызначэнне вугла паміж плоскасцямі не залежыць ад выбару прамых a і b, праведзеных у плоскасцях і перпендыкулярных іх лініі перасячэння. Сапраўды, калі ў дадзеных плоскасцях правесці якія-небудзь іншыя прамыя a_1 і b_1 перпендыкулярна іх лініі перасячэння l праз пункт O_1, то $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$, а, значыць, вугал паміж прамымі a і b роўны вуглу паміж прамымі a_1 і b_1 (рыс. 178, *а*, *б*).



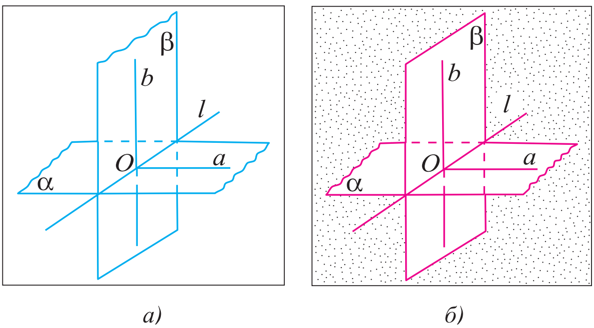
а) *б)*

Рыс. 178

Калі плоскасці паралельныя, то вугал паміж імі лічыцца роўным 0°. Вугал паміж плоскасцямі α і β абазначаецца $\angle(\alpha, \beta)$. З азначэння вынікае, што вугал паміж плоскасцямі, якія перасякаюцца, задавальняе ўмову $0° < \angle(\alpha, \beta) \leqslant 90°$.

Азначэнне. **Дзве плоскасці называюцца перпендыкулярнымі, калі вугал паміж імі роўны 90°.**

Тэарэма 1 (*прымета перпендыкулярнасці плоскасцей*). ***Калі адна з дзвюх плоскасцей праходзіць праз прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то гэтыя плоскасці перпендыкулярныя.***



Рыс. 179

Дадзена: прамая b ляжыць у плоскасці β, $b \perp \alpha$ (рыс. 179, *а*, *б*).

Даказаць: $\beta \perp \alpha$.

Доказ.

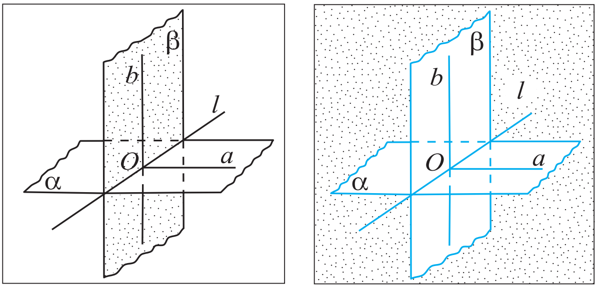
1) Няхай пункт O — пункт перасячэння прамой b з плоскасцю α. Пункт O — агульны пункт плоскасцей α і β, значыць, дадзеныя плоскасці перасякаюцца па прамой l, якая праходзіць праз пункт O.

2) У плоскасці α праз пункт O правядзём прамую a, перпендыкулярную прамой l.

3) Прамыя a і l ляжаць у плоскасці α і па ўмове $b \perp \alpha$, значыць, $b \perp a$ і $b \perp l$. Такім чынам, $b \subset \beta$, $b \perp l$ і $a \subset \alpha$, $a \perp l$, значыць, $\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b) = 90°$, г. зн. $\beta \perp \alpha$.

Тэарэма даказана.

Тэарэма 2. ***Прамая, якая ляжыць у адной з дзвюх перпендыкулярных плоскасцей і перпендыкулярная прамой, па якой яны перасякаюцца, перпендыкулярная другой плоскасці.***



а) *б)*

Рыс. 180

Д а д з е н а:

$\beta \perp \alpha$, $\beta \cap \alpha = l$,
$b \subset \beta$, $b \perp l$.

Д а к а з а ц ь:
$b \perp \alpha$.

Д о к а з.

1) Абазначым літарай O пункт перасячэння прамой b з прамой l (рыс. 180, *а*, *б*).

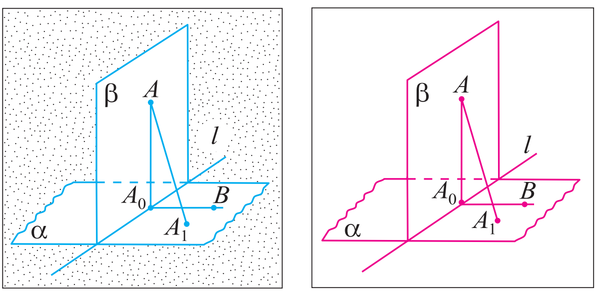
2) Правядзём у плоскасці α праз пункт O прамую a, перпендыкулярную прамой l.

3) Прамыя a і b перпендыкулярны прамой l, па якой перасякаюцца плоскасці α і β. Значыць, вугал паміж прамымі a і b роўны вуглу паміж плоскасцямі α і β, значыць, роўны $90°$.

4) Такім чынам, прамая b перпендыкулярная прамым a і b, якія ляжаць у плоскасці α і перасякаюцца. Значыць, $b \perp \alpha$.

Тэарэма даказана.

Задача 1. Дакажыце, што прамая, праведзеная праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей і перпендыкулярная другой плоскасці, ляжыць у першай плоскасці.



а) *б)*

Рыс. 181

Д а д з е н а:

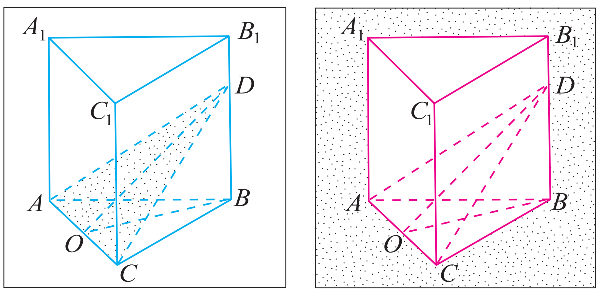
$\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$,
$A \in \beta$, $AA_1 \perp \alpha$.

Д а к а з а ц ь:
$AA_1 \subset \beta$.

Доказ.

Будем меркаваць, што прамая AA_1 не ляжыць у плоскасці β (рыс. 181, *а*, *б*). Правядзём у плоскасці β прамую $AA_0 \perp l$, а ў плоскасці α правядзём $BA_0 \perp l$. Тады $\angle AA_0B$ ёсць лінейны вугал двухграннага вугла $\alpha l\beta$. Паколькі $\alpha \perp \beta$, то $\angle AA_0B = 90°$, г. зн. $AA_0 \perp BA_0$. Прамая AA_0 перпендыкулярная дзвюм прамым l і BA_0, якія ляжаць у плоскасці α і перасякаюцца, значыць, $AA_0 \perp \alpha$. Гэта супярэчыць існаванню адзінай прамой, якая праходзіць праз пункт і перпендыкулярная плоскасці. Меркаванне, што прамая AA_1 не ляжыць у плоскасці β, няправільнае, а значыць, прамая AA_1 ляжыць у плоскасці β.

Задача 2. Аснова прамой прызмы $ABCA_1B_1C_1$ — трохвугольнік ABC, у якім $AB = BC = 7$ см, $AC = 2$ см. Праз прамую AC праведзена плоскасць α пад вуглом $30°$ да плоскасці ABC, якая перасякае бакавы кант BB_1 у пункце D. Вылічыце плошчу атрыманага сячэння (рыс. 182, *а*, *б*).



Рыс. 182

Дадзена:
$ABCA_1B_1C_1$ — прамая трохвугольная прызма,
$AC \subset \alpha$,
$\angle(\alpha, ABC) = 30°$,
$AB = BC = 7$ см,
$AC = 2$ см.

Знайсці:
S сячэння.

Рашэнне.

1) У трохвугольніку ADC старана $AC = 2$ см. Для знаходжання яго плошчы неабходна знайсці вышыню, праведзеную да стараны AC (гл. рыс. 182, *а*, *б*).

2) $DB \perp (ABC)$ (паколькі прызма прамая, то $DB \perp AB$ і $DB \perp BC$). Акрамя таго, $CD = AD$ (нахіленыя, якія маюць роўныя праекцыі CB і AB).

3) Няхай пункт O — сярэдзіна адрэзка AC, тады медыяна DO — вышыня раўнабедранага трохвугольніка ADC, а $\angle DOB = 30°$ (паколькі $DO \perp AC$ і $BO \perp AC$).

4) У трохвугольніку BOC даўжыня катэта $BO =$ $= \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{49 - 1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см).

5) У трохвугольніку OBD ($\angle OBD = 90°$, $\angle DOB = 30°$, $BO =$ $= 4\sqrt{3}$ см) даўжыня гіпатэнузы $OD = \frac{OB}{\cos 30°} = \sqrt{48} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 8$ (см).

6) Цяпер знойдзем $S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$ (см^2).

Адказ: 8 см^2.

Задача 3. Дакажыце, што плошча $S_{\text{арт}}$ артаганальнай праекцыі трохвугольніка ABC на плоскасць роўна здабытку яго плошчы S на косінус вугла φ паміж плоскасцю трохвугольніка і плоскасцю праекцыі: $S_{\text{арт}} = S \cos \varphi$. Правядзіце доказ самастойна.

Задачы да § 4

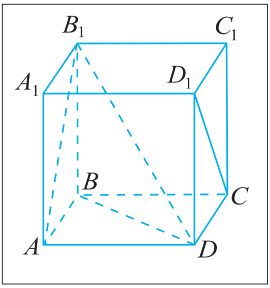
415. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рыс. 183). а) Ці правільна, што $\angle BDB_1$ з'яўляецца лінейным вуглом двухграннага вугла B_1ADB? б) Дакажыце, што $\angle B_1AB$ ёсць лінейны вугал двухграннага вугла B_1ADB. в) Знайдзіце градусную меру двухграннага вугла D_1CBA.

416. $DABC$ — правільная трохвугольная піраміда, пункт O — сярэдзіна канта BC. а) Ці правільна, што $\angle ACD$ з'яўляецца лінейным вуглом двухграннага вугла $ACBD$? б) Дакажыце, што $\angle AOD$ ёсць лінейны вугал двухграннага вугла $ACBD$.

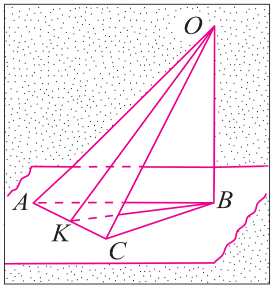
417. ABC — раўнабедраны трохвугольнік, $AB = BC$. Адрэзак OB перпендыкулярны плоскасці ABC, пункт K — сярэдзіна стараны AC (рыс. 184). а) Ці з'яўляюцца вуглы OCB і OAB лінейнымі вугламі двухграннага вугла $OACB$? б) Дакажыце, што $\angle OKB$ ёсць лінейны вугал двухграннага вугла $OACB$.

418. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дыяганаль A_1C утварае з плоскасцю асновы вугал $30°$. Вылічыце градусную меру двухграннага вугла A_1CDA, калі $CD = 4$ см, $AD = 2\sqrt{2}$ см.

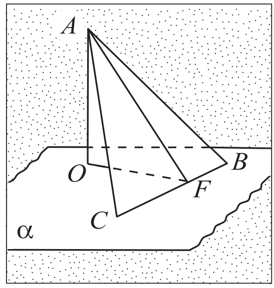
419. Старана BC трохвугольніка ABC ляжыць у плоскасці α, адрэзак AF — вышыня трохвугольніка ABC. Пункт O — аснова перпендыкуляра, праведзенага з пункта A да плоскасці α. Дакажыце, што вугал AFO — лінейны вугал двухграннага вугла $ABCO$ (рыс. 185).



Рыс. 183



Рыс. 184



Рыс. 185

420. Катэт BC прамавугольнага трохвугольніка ABC ($\angle ABC = 90°$) ляжыць у плоскасці α. Пункт O — аснова перпендыкуляра, праведзенага з вяршыні A да плоскасці α. Двухгранны вугал $ABCO$ роўны $45°$. Вылічыце градусную меру вугла паміж прамой AC і плоскасцю α, калі $BC = 2$ см, $AO = \sqrt{2}$ см.

421. У трохвугольнай пірамідзе $DABC$ бакавы кант DB перпендыкулярны плоскасці асновы, а грань ADC — прамавугольны трохвугольнік ($\angle DCA = 90°$). Вылічыце плошчу асновы піраміды, калі вугал паміж плоскасцямі ADC і ABC роўны $30°$, $AC = 8$ см, $AD = 10$ см.

422. Аснова прамой прызмы $ABCA_1B_1C_1$ — раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік ABC ($\angle ABC = 90°$). Двухгранны вугал C_1ABC роўны $60°$. Вылічыце плошчу сячэння прызмы плоскасцю ABC_1, калі $AC = 4\sqrt{2}$ см.

423. Даўжыні катэтаў прамавугольнага трохвугольніка 6 см і 8 см. Вылічыце адлегласць ад вяршыні прамога вугла дадзенага трохвугольніка да плоскасці, якая праходзіць праз гіпатэнузу і ўтварае вугал $30°$ з плоскасцю трохвугольніка.

424. Прамая OB перпендыкулярная плоскасці паралелаграма $ABCD$, адрэзак BK — вышыня дадзенага паралелаграма (рыс. 186). а) Ці правільна, што вугал OAB з'яўляецца лінейным вуглом двухграннага вугла $OADB$? б) Дакажыце, што $\angle OKB$ ёсць лінейны вугал двухграннага вугла $OADB$.

425. Дадзены двухгранны вугал $\alpha l \beta$. У грані β з пункта A праведзены перпендыкуляр AB да канта l. З гэтага ж пункта A праведзены перпендыкуляр AC да плоскасці, якая змя-

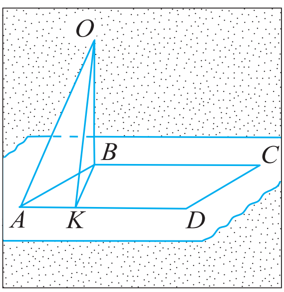
шчае грань α, прычым $C \in \alpha$. Дакажыце, што $\angle ABC$ ёсць лінейны вугал дадзенага двухграннага вугла.

426. Старана AD ромба $ABCD$ ляжыць у плоскасці α, якая ўтварае з плоскасцю ромба вугал $60°$. Вылічыце даўжыню стараны ромба, калі $\angle ABD = 45°$, а адлегласць ад вяршыні B ромба да плоскасці α роўна $\sqrt{3}$ см.

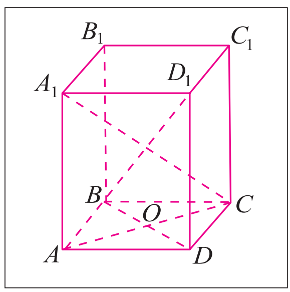
427. Вяршыня B ромба $ABCD$ з'яўляецца асновай перпендыкуляра, праведзенага з пункта O да плоскасці, у якой ляжыць ромб. Вылічыце адлегласць ад пункта O да плоскасці ABC, калі вугал BAD роўны $45°$, $AB = 2$ см, двухгранны вугал $OADB$ роўны $60°$.

428. У ромбе $ABCD$ старана $AB = 20$ см, $\angle BAD = 45°$, пункт E — аснова перпендыкуляра, праведзенага з вяршыні B да плоскасці α, якая змяшчае старану AD. Вылічыце адлегласць ад пункта E да плоскасці ABC, калі двухгранны вугал $BADE$ роўны $60°$.

429. Аснова прамога паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелаграм $ABCD$, плошча якога 40 см^2. Вылічыце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю ADB_1, калі вядома, што яна ўтварае з плоскасцю асновы вугал $60°$.



Рыс. 186



Рыс. 187

430. Аснова трохвугольнай піраміды $DABC$ — прамавугольны трохвугольнік ACB з прамым вуглом пры вяршыні C, $DA \perp (ABC)$. Вылічыце градусную меру двухграннага вугла $ABCD$ і плошчу грані DCB, калі $AC = BC = 1$ см, $DB = \sqrt{5}$ см.

431. Дакажыце, што плоскасць, перпендыкулярная прамой, па якой перасякаюцца дзве дадзеныя плоскасці, перпендыкулярная кожнай з гэтых плоскасцей.

432. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамы паралелепіпед, аснова якога — ромб $ABCD$ (рыс. 187). а) Дакажыце, што плоскасць, якая змяшчае грань BCC_1B_1, перпендыкулярная плоскасці ABC. б) Ці правільна, што плоскасці BDD_1 і A_1AC узаемна перпендыкулярныя? в) Дакажыце, што плоскасць BDD_1 перпендыкулярная плоскасці асновы.

433. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бакавая грань DD_1C_1C — квадрат. Дакажыце, што плоскасці BCD_1 і DC_1B_1 перпендыкулярныя.

434. У прамавугольным паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ аснова $ABCD$ — квадрат. Пункт E дзеліць адрэзак AC у адносіне $1:3$, лічачы ад вяршыні A. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт E і перпендыкулярная плоскасцям ABC і A_1AC, калі $BC = 1$ см, $AC_1 = \sqrt{6}$ см. Вылічыце плошчу гэтага сячэння.

435. Плоскасці α і β перасякаюцца па прамой l. З пункта O праведзены перпендыкуляры OA і OB да плоскасцей α і β адпаведна. Прамая l перасякае плоскасць OAB у пункце C. Дакажыце, што $OC \perp l$.

436. $TABCD$ — чатырохвугольная піраміда, аснова якой — квадрат $ABCD$. Бакавы кант TB перпендыкулярны плоскасці асновы, а пункт O — сярэдзіна канта TC. Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз прамую DO і перпендыкулярная плоскасці асновы, калі $TB = BC = a$.

437. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды ўзаемна перпендыкулярныя, а іх даўжыні роўныя a. Знайдзіце косінус вугла, утворанага плоскасцю бакавой грані з плоскасцю асновы.

438. $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, пункт F — сярэдзіна бакавога канта SC. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз прамую DF і перпендыкулярная плоскасці SBD.

439. Пункты K і M — сярэдзіны кантаў SC і AC тэтраэдра $SABC$ адпаведна. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі ABK і SBM.

440. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пункты T і K — сярэдзіны кантаў CC_1 і DC адпаведна. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі ATD і A_1D_1K.

441. Цэнтр роўнастаронняга трохвугольніка ABC ёсць аснова перпендыкуляра, праведзенага з пункта D да плоскасці гэтага трохвугольніка. Знайдзіце косінус вугла паміж плоскасцямі ABC і ABD, калі трохвугольнік ABD роўнастаронні.

442. Асновай пірамiды $SABCD$ з'яўляецца прамавугольнік $ABCD$. Бакавы кант SB перпендыкулярны плоскасці асновы і $BS = 1$ см, $BC = 2$ см. На канце SC узяты пункт O так, што $CO : OS = 1 : 3$. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю ABO і знайдзіце тангенс вугла паміж плоскасцю ABO і плоскасцю асновы піраміды.

443. Вяршыня C трохвугольніка ABC з'яўляецца артаганальнай праекцыяй вяршыні D трохвугольніка ABD. Дакажыце, што плошча трохвугольніка ABC роўна $S \cos \varphi$, дзе S — плошча трохвугольніка ABD, φ — вугал паміж плоскасцямі ABD і ABC.

444. Пункты A і B ляжаць на канце двухграннага вугла, AC і BD — перпендыкуляры да канта, праведзеныя ў розных гранях вугла. Знайдзіце двухгранны вугал, калі $AB = 24$ см, $AC = 8$ см, $BD = 5$ см і адлегласць паміж пунктамі C і D роўна 25 см.

445. Пункты A і B ляжаць на канце двухграннага вугла, роўнага $120°$. Адрэзкі AC і BD праведзены ў розных яго гранях і перпендыкулярныя да канта двухграннага вугла. Вылічыце даўжыню адрэзка CD, калі $AB = AC = BD = 3$ см.

446. Дадзены трохвугольнік ABC, у якога $AB = BC = 3$ см, $AC = 4$ см. Старана AB ляжыць у плоскасці α, а праекцыі дзвюх іншых старон трохвугольніка на гэту плоскасць адносяцца як $1 : 2$. Знайдзіце двухгранны вугал, утвораны плоскасцю α і плоскасцю ABC.

447. Знайдзіце двухгранны вугал, грані якога змяшчаюць дзве бакавыя грані правільнай чатырохвугольнай піраміды, даўжыня бакавога канта якой роўна 3 см, а стораны асновы — $2\sqrt{3}$ см.

448. Даўжыня бакавога канта правільнай трохвугольнай прызмы роўна 3 см, а стораны асновы — 2 см. Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз бакавы кант прызмы і перпендыкулярная процілеглай грані, і вылічыце адлегласць ад пункта перасячэння дыяганалей гэтага сячэння да вяршыні прызмы, якая не ляжыць у сячэнні.

ДАДАТАК

ПАБУДАВАННЕ ВІДАРЫСАЎ ФІГУР

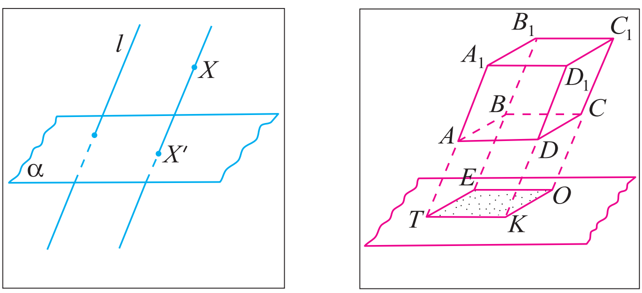
§ 1. Паралельнае праектаванне

Для пабудавання на плоскасці (напрыклад, на аркушы паперы) відарысаў геаметрычных фігур, размешчаных у прасторы, выкарыстоўваецца паралельнае праектаванне. Ажыццяўляецца яно наступным чынам.

Няхай α — некаторая плоскасць, а l — некаторая прамая, якая перасякае гэту плоскасць. Возьмем у прасторы адвольны пункт X. Калі пункт X не ляжыць на прамой l, то правядзём праз пункт X прамую, паралельную прамой l, і абазначым праз X' пункт перасячэння гэтай прамой з плоскасцю α. Калі пункт X ляжыць на прамой l, то абазначым праз X' пункт перасячэння прамой l з плоскасцю α.

Пункт X' называецца праекцыяй пункта X на плоскасць α пры праектаванні паралельна прамой l (або паралельнай праекцыяй пункта X).

Плоскасць α называецца *плоскасцю праекцыі*, а аб прамой l гавораць, што яна задае *напрамак праектавання* (рыс. 188, *а*). Усе прамыя, паралельныя прамой l, задаюць адзін і той жа напрамак праектавання, таму называюцца *праектавальнымі прамымі*.



а) *б)*

Рыс. 188

Няхай F — плоская або прасторавая фігура. ***Праекцыяй фігуры F на плоскасць α пры праектаванні паралельна прамой l называецца мноства F' праекцый усіх пунктаў***

фігуры F. Напрыклад, калі плоскасць α паралельная аснове $ABCD$ паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а прамая l паралельная прамой AA_1, то праекцыяй паралелепіпеда на плоскасць α з'яўляецца паралелаграм $TEOK$ (рыс. 188, *б*).

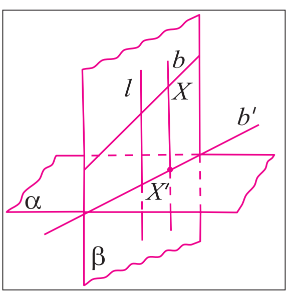
Заўважым, што праекцыя зададзенай фігуры залежыць ад выбару плоскасці праекцыі і прамой, паралельна якой ажыццяўляецца праектаванне.

Сфармулюем і дакажам асноўныя ўласцівасці паралельнага праектавання пры ўмове, што адрэзкі і прамыя, якія праектуюцца, не паралельны прамой, якая задае напрамак праектавання.

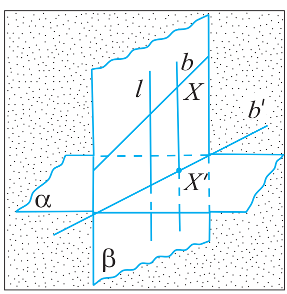
Уласцівасць 1. ***Праекцыя прамой ёсць прамая, а праекцыя адрэзка — адрэзак.***

Доказ.

Няхай b — некаторая прамая, непаралельная прамой l, якая задае напрамак праектавання. Без абмежавання агульнасці, можам лічыць, што прамыя b і l перасякаюцца. Праз прамыя b і l праходзіць адзіная плоскасць β. Яна перасякае плоскасць α па некаторай прамой b'. Гэта прамая і з'яўляецца праекцыяй прамой b на плоскасць α. Сапраўды, няхай пункт $X \in b$, а пункт X' — яго праекцыя на плоскасць α. Тады прамая XX', паралельна якой ажыццяўляецца праектаванне, ляжыць у плоскасці β. Плоскасць β перасякае α па прамой b', значыць, пункт X' ляжыць на прамой b'. Акрамя таго, кожны пункт прамой b' з'яўляецца праекцыяй некаторага пункта прамой b. Такім чынам, прамая b' — праекцыя прамой b (рыс. 189, *а*, *б*).



а)



б)

Рыс. 189

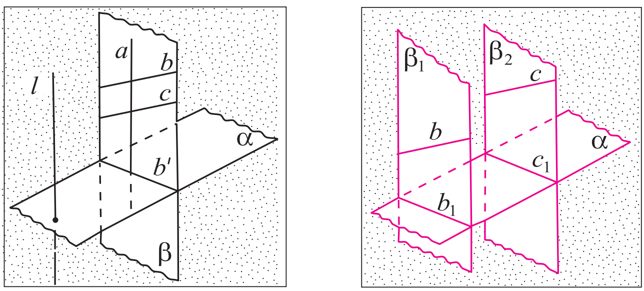
Цяпер няцяжка зразумець, што праекцыя адрэзка ёсць адрэзак.

Уласцівасць 2. ***Праекцыі паралельных прамых паралельныя або супадаюць.***

Доказ.

Няхай дадзены дзве паралельныя прамыя b і c. Магчымы два выпадкі.

1) Некаторая прамая a, паралельна якой ажыццяўляецца праектаванне, перасякае абедзве прамыя b і c. У гэтым выпадку прамая a, а таксама ўсе астатнія праектавальныя прамыя, якія перасякаюць прамыя b і c, ляжаць у адной плоскасці β, якая праходзіць праз паралельныя прамыя b і c. Але тады па ўласцівасці **1** праекцыяй прамой b і прамой c будзе прамая b', па якой перасякаюцца плоскасці β і α (рыс. 190, *а*).



а) *б)*

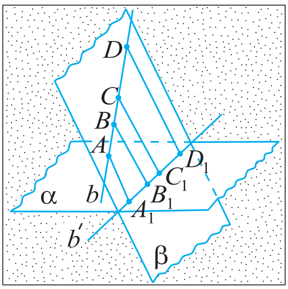
Рыс. 190

2) Не існуе праектавальных прамых, якія перасякаюць прамыя b і c адначасова. Няхай β_1 — плоскасць, у якой ляжаць усе прамыя, што праектуюць пункты прамой b на плоскасць α, а β_2 — плоскасць, у якой ляжаць прамыя, што праектуюць пункты прамой c на плоскасць α. Плоскасці β_1 і β_2 паралельныя, значыць, праекцыі b_1 і c_1 прамых b і c паралельныя як лініі перасячэння паралельных плоскасцей β_1 і β_2 з плоскасцю α (рыс. 190, *б*).

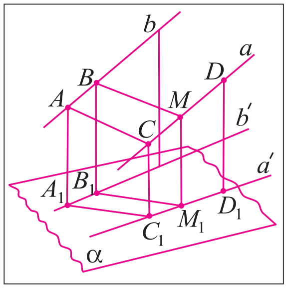
Уласцівасць 3. ***Адносіна даўжынь праекцыі адрэзкаў, якія ляжаць на адной прамой або на паралельных прамых, роўна адносіне даўжынь саміх адрэзкаў.***

Доказ.

1) Няхай адрэзкі AB і CD ляжаць на адной прамой b, а прамая b' — праекцыя прамой b на плоскасць α паралельна прамой l (рыс. 191, *а*). Праекцыі A_1B_1 і C_1D_1 адрэзкаў AB і CD ляжаць на прамой b'. Праектавальныя прамыя AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 паралельныя паміж сабой і ляжаць у адной плоскасці β ($b' = \beta \cap \alpha$). З планіметрыі вядома, што паралельныя прамыя AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 адсякаюць ад дзвюх прамых b і b' плоскасці β прапарцыянальныя адрэзкі, г. зн. $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$.



а)



б)

Рыс. 191

Няхай адрэзкі AB і CD ляжаць на паралельных прамых b і a (рыс. 191, *б*). Правядзём прамую AC і праз пункт B паралельную ёй прамую, якая перасякае прамую a ў некаторым пункце M. Чатырохвугольнік $ABMC$ — паралелаграм. Разгледзім выпадак, калі яго праекцыя на плоскасць α ёсць паралелаграм $A_1B_1M_1C_1$. Тады $AB = CM$, $A_1B_1 = C_1M_1$. Па доказаным $CM : CD = C_1M_1 : C_1D_1$. Такім чынам, $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$.

Калі праекцыя паралелаграма $ABMC$ ёсць адрэзак (у выпадку, калі праекцыі прамых a і b супадаюць), доказ дадзенай уласцівасці больш просты.

Вынік. ***Пры паралельным праектаванні сярэдзіна адрэзка праектуецца ў сярэдзіну яго праекцыі.***

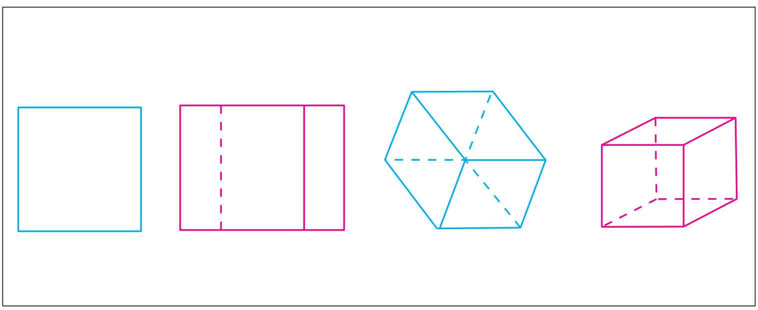
§ 2. Пабудаванне відарысаў фігур

Разгледжаныя ў папярэднім параграфе ўласцівасці паралельнага праектавання выкарыстоўваюцца пры выкананні рысункаў (відарысаў фігур), якія ілюструюць тэарэмы і задачы стэрэаметрыі.

Відарысам фігуры F называецца любая фігура, падобная праекцыі гэтай фігуры на некаторую плоскасць.

Выконваючы відарысы фігур, размешчаных у прасторы, неабходна ўлічваць уласцівасці, якія захоўваюцца пры паралельным праектаванні, а ў астатнім відарыс можа быць адвольным. Важна толькі, каб відарысы разглядаемых фігур былі нагляднымі і давалі правільнае ўяўленне аб іх.

Пры выбары розных плоскасцей праекцыі і напрамкаў праектавання атрымліваюцца розныя праекцыі дадзенай фігуры, а значыць, і розныя яе відарысы. Напрыклад, відарысамі куба з'яўляюцца фігуры, паказаныя на рысунку 192, *а*, *б*, *в*, *г*.

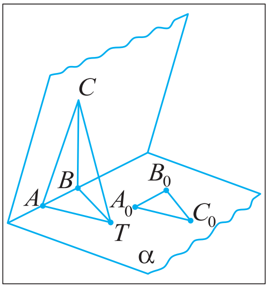


а) *б)* *в)* *г)*

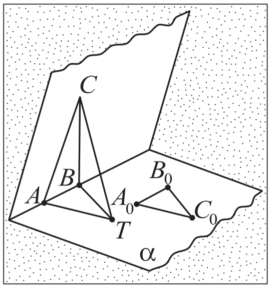
Рыс. 192

Відарыс куба, дадзены на рысунку 192, *а*, не дае ўяўлення аб кубе, наглядным з'яўляецца відарыс, дадзены на рысунку 192, *г*. Пры пабудаванні відарысаў плоскіх фігур, размешчаных у прасторы, маецца на ўвазе, што плоскасці разглядаемых фігур не паралельны напрамку праектавання.

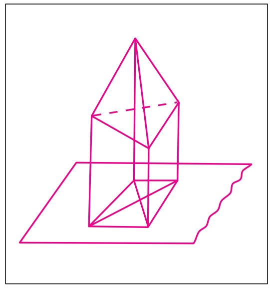
1. ***У якасці відарыса дадзенага трохвугольніка можна ўзяць адвольны трохвугольнік.***



а)



б)



в)

Рыс. 193

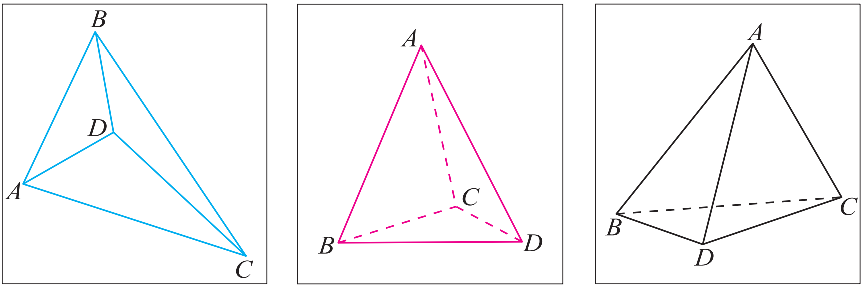
Сапраўды, няхай дадзены два трохвугольнікі ABC і $A_0B_0C_0$ (рыс. 193, *а*, *б*). Абазначым плоскасць α, якая праходзіць праз прамую AB, а ABT — трохвугольнік у гэтай плоскасці, падобны трохвугольніку $A_0B_0C_0$. Тады пры праектаванні на плоскасць α паралельна прамой CT трохвугольнік ABC праектуецца на трохвугольнік ABT так, што яго праекцыя будзе падобна трохвугольніку $A_0B_0C_0$. У прыватнасці, за відарыс прамавугольнага, раўнабедранага, роўнастаронняга трохвугольнікаў можна прыняць любы трохвугольнік.

2. ***У якасці відарыса дадзенага паралелаграма можна ўзяць адвольны паралелаграм.***

Сапраўды, праекцыямі роўных паралельных адрэзкаў з'яўляюцца роўныя паралельныя адрэзкі, значыць, відарысам паралелаграма з'яўляецца паралелаграм. У прыватным выпадку за відарыс прамавугольніка, квадрата, ромба можна прыняць любы паралелаграм.

3. Пры пабудаванні відарысаў прасторавых фігур карыстаюцца тым фактам, што ***фігуру, якая складаецца са старон і дыяганалей любога выпуклага або нявыпуклага чатырохвугольніка, можна лічыць відарысам трохвугольнай піраміды*** пры пэўным выбары напрамку праектавання і плоскасці, на якую праектуецца гэта піраміда (рыс. 193, *в*).

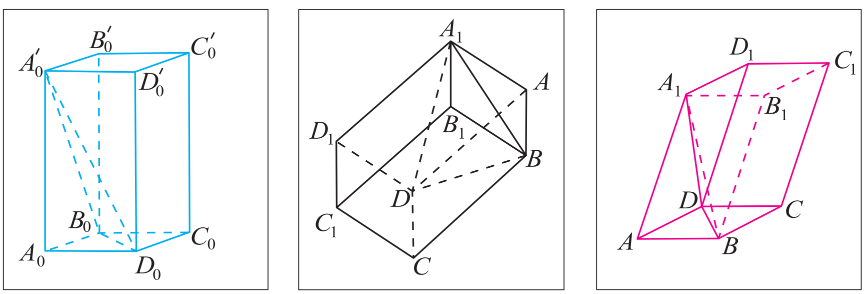
Напрыклад, фігуры, дадзеныя на рысунку 194, *а*, *б*, *в*, з'яўляюцца відарысамі трохвугольнай піраміды пры адпаведным выбары напрамку праектавання.



а) б) в)

Рыс. 194

Для пабудавання відарыса паралелепіпеда $A_0B_0C_0D_0A'_0B'_0C'_0D'_0$ можна выкарыстаць тое, што пункты A_0, B_0, D_0, A'_0 з'яўляюцца вяршынямі трохвугольнай піраміды $A_0B_0D_0A'_0$. У якасці відарыса гэтых вяршынь можна ўзяць вяршыні адвольнага чатырохвугольніка $ABDA_1$, г. зн. тры адрэзкі AB, AD і AA_1 у плоскасці відарыса з агульным канцом A, ніякія два з якіх не ляжаць на адной прамой, можна прыняць за відарыс кантаў A_0B_0, A_0D_0 і $A_0A'_0$ паралелепіпеда. Відарысы астатніх кантаў паралелепіпеда будуюцца з выкарыстаннем уласцівасцей, якія захоўваюцца пры паралельным праектаванні (усе грані паралелепіпеда з'яўляюцца паралелаграмамі, значыць, іх відарысы — паралелаграмы). На рысунку 195, *б*, *в* дадзены розныя відарысы паралелепіпеда $A_0B_0C_0D_0A'_0B'_0C'_0D'_0$ (рыс. 195, *а*).



а) б) в)

Рыс. 195

АДКАЗЫ

Раздзел 1

§ 1

2. Правільна. **3.** Правільна. **14.** Правільна. **15.** Правільна. **16.** Можна. **19.** 24 см^2. **20.** $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$. **21.** $\sqrt{10}$ см. **26.** $\frac{48}{49}\left(9-4\sqrt{2}\right)$ см^2. **27.** $2\left(5+3\sqrt{2}\right)$ см. **30.** $9\sqrt{3}$ см^2. **31.** 7 см. **32.** $4\left(3+\sqrt{2}\right)$ см. **33.** 6 см^2. **34.** 20 см. **35.** 4 см^2. **38.** 240 см^2. **39.** $24\sqrt{15}$ см^2. **40.** 4 см^2. **41.** 192 см^2. **42.** 13 см, $\sqrt{41}$ см. **43.** 2 см. **44.** а) 216 см^2; б) 512 см^3. **45.** $64\sqrt{3}$ см^2. **46.** $\frac{8\sqrt{15}}{15}$ см.

§ 2

56. а) Напрыклад, *DB*, *TF*, *CF*, *AF*, *OF*; в) правільна; г) напрыклад, *AD*, *DB*, *AB*, *AF*, *TB*, *TF*. **58.** а) Пункт *O*; б) па прамой *OD*. **60.** а) Плоскасці *ABT* і *TBC* перасякаюцца па прамой *BT*, плоскасці *TBE* і *TDC* перасякаюцца па прамой *TC*; в) правільна. **62.** а) Пункт *F*; б) па прамой *FT*; в) правільна. **66.** а) Пункт *O*; б) у пункце *K*; в) правільна. **68.** а) Прамая *PX*; б) у пункце *P*; в) правільна. **93.** $\left(\sqrt{5}+1\right)S$. **94.** $2a^2\left(1+\frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$. **95.** $\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ см. **96.** $8\sqrt{3}$ см^2.

§ 3

98. Правільна, калі гэтыя пункты не ляжаць на адной прамой. **102.** *ACD*, *AKD*, *AFD*, *ABD*. **107.** $\sqrt{3}$ см. **110.** Не заўсёды. **111.** $5\sqrt{2}$ см.

§ 4

125. б) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ см^2. **126.** 12 см^2. **129.** б) $\left(6+\sqrt{3}\right)$ см. **130.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **133.** $\frac{3\sqrt{41}}{5}$ см. **134.** $\frac{a\sqrt{8R^2-a^2}}{2}$. **135.** б) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{10}-1)P}{9}$. **136.** $\sqrt{3}$ см. **137.** 1 см. **138.** $2\sqrt{2}Q$. **141.** $\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}$. **142.** $3a^2$. **145.** $2\sqrt{3}$ см^2. **146.** $\frac{\sqrt{2(4S^2+a^4)}}{4a}$. **147.** $\frac{a^2\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **150.** $\left(\sqrt{5}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ см. **151.** 24 см^2. **158.** $8\sqrt{21}$ см^2. **149.** $2\sqrt{6}S$. **160.** $\frac{\sqrt{7}(6-\sqrt{3})S}{66}$. **161.** $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$. **162.** $4a\sqrt{\sqrt{a^4+4S^2}-a^2}$. **163.** $2\sqrt{3}S$. **164.** 288 см^2. **165.** $\frac{1}{4}a\sqrt{b^2+a^2}$.

Раздзел 2

§ 1

176. б) $\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$ см. **180.** 13 см. **181.** 36 см. **182.** $\frac{8}{3}$ см. **183.** 20 см. **184.** 3 см. **185.** 8 см. **187.** 9, 8 см. **188.** 1, 8 см. **189.** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ см. **190.** $\frac{9\sqrt{3}a^2}{8}$. **194.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **195.** 16 см^2. **196.** $\frac{\sqrt{S}}{4}$. **197.** $\frac{\sqrt[4]{15S^2}}{4}$. **198.** $\frac{16\sqrt{11S}}{33}$.

§ 2

209. б) 2,5 см. **214.** 6 см. **215.** 24 см^2. **218.** 180 см^2. **219.** $OD = 6$ см, $KT = 9$ см. **220.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **221.** $a\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)$. **222.** 5 см. **223.** 16 см. **228.** $\frac{8}{3}$ см. **230.** 3 см. **232.** 1 см^2. **233.** $2a$. **234.** 6 см. **235.** 4 см. **236.** 2 см.

§ 3

242. б) Няправільна; в) не з'яўляецца. **244.** а) Прамыя OX і ME скрыжаваныя; б) не перасякаюцца; в) правільна. **248.** а) Няправільна; б) не перасякаюцца; в) прамыя OA_1 і CC_1 не з'яўляюцца скрыжаванымі, прамыя CC_1 і TD скрыжаваныя. **253.** а) Прамыя OC і DT скрыжаваныя.

§ 4

269. а) Правільна; б) 30°; в) няправільна. **270.** а) 90°; б) правільна. **271.** а) 60°; б) няправільна; в) 30°. **272.** а) Правільна; б) 60°; в) 60°. **273.** а) Правільна; б) 90°; в) $\frac{1}{5}$. **274.** $\arccos\frac{4}{5}$. **275.** а) 60°; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$. **276.** $\arccos\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **277.** а) 60°; б) 60°. **278.** 90°. **279.** б) arctg 2; в) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

§ 5

292. б) 4 см^2. **295.** $2\left(\sqrt{3}+1\right)$ см. **296.** а) Правільна. **301.** $\left(2+\sqrt{17}\right)$ см. **305.** $\frac{9}{4}\sqrt{427}$ см^2. **308.** 14 см. **309.** $\frac{S}{16}$. **310.** 16 см^2. **311.** 72 см. **312.** 19 см. **313.** $\frac{4}{3}S$. **314.** $\frac{5}{4}Q$. **315.** $\frac{1}{9}S$, $\frac{4}{9}S$. **316.** $\frac{4}{25}Q$. **317.** 1 : 2, лічачы ад вяршыні піраміды. **318.** $\frac{9a\sqrt{4b^2-a^2}}{64}$. **319.** 8 см^2.

Раздзел 3

§ 1

335. 5 см. **336.** б) 20 см. **337.** 10 см або $8\sqrt{10}$ см. **338.** $\sqrt{29}$ см. **345.** $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$. **347.** $4\sqrt{2}$ см^2. **349.** 5 см. **350.** $\frac{13}{4}$ см. **351.** 90°. **352.** 12 см. **353.** 12 см. **355.** $16\sqrt{2}$ см^2. **357.** $4\left(2+\sqrt{5}\right)$ см^2. **358.** 14 см. **359.** в) 4 см. **360.** 5 см. **362.** 4 см. **363.** 12 см. **364.** 12 см, 20 см. **365.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **366.** $\frac{2}{9}ab$.

§ 2

371. $\sqrt{33}$ см. **372.** $a\sin\varphi$. **374.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **377.** 30 см^2. **378.** 4 см. **379.** б) $9\sqrt{2}$ см^2. **380.** 5 см. **381.** $2\sqrt{3}$ см^2. **382.** $\frac{\sqrt{4S^2-a^2b^2}}{a}$. **383.** $48\sqrt{10}$ см^2. **384.** 4 см. **385.** 2 см, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **386.** $d(O,\ DB)=$ $=8\sqrt{5}$ см, $d(O,\ BC)=8\sqrt{5}$ см, $d(O,\ DC)=12\sqrt{2}$ см. **387.** $4\left(2+\sqrt{6}\right)$см.^{2} **388.** $\frac{a\sqrt{b^2+a^2\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}$. **389.** $\frac{a\sqrt{55}}{5}$. **390.** $OA=\frac{\sqrt{16S^2-3a^4}}{2a}$, $\frac{a}{8S}\sqrt{48S^2-9a^4}$. **391.** 4 см, 6 см. **392.** 20 см. **393.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. **394.** 16 см, 40 см. **395.** $\frac{\sqrt{51}}{2}$ см^2. **396.** 17 см. **397.** 2,5 см. **398.** $\sqrt{34}$ см.

§ 3

399. а) Правільна; б) DC. **400.** а) C_1O; б) няправільна. **401.** а) Няправільна; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **402.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **403.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см. **404.** $\sqrt{2}\sin\varphi$. **405.** 45°. **406.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **407.** $3a$. **408.** $\frac{a^2}{2}\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$. **409.** $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ см. **410.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **411.** 45°, 45°. **412.** 2 см, $\sqrt{6}$ см. **413.** 30°. **414.** 60°.

§ 4

415. а) Няправільна; в) 45°. **416.** а) Няправільна. **417.** а) Не. **418.** 45°. **420.** 30°. **421.** $12\sqrt{3}$ см^2. **422.** 16 см^2. **423.** 2,4 см. **424.** а) Няправільна. **426.** 2 см. **427.** $\sqrt{6}$ см. **428.** $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ см. **429.** 80 см^2. **430.** 60°, 1 см^2. **434.** $\sqrt{2}$ см^2. **436.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **437.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **439.** 60°. **440.** 90°. **441.** $\frac{1}{3}$. **442.** $\frac{1}{6}$. **444.** 60°. **445.** 6 см. **446.** 60°. **447.** 120°. **448.** 2 см.

(Назва і нумар установы адукацыі)

Вучэбны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Шлыкаў Уладзімір Уладзіміравіч

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 10 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

3-е выданне, перагледжанае і выпраўленае

Заг. рэдакцыі *В. Г. Бехціна*. Рэдактар *Л. М. Ясніцкая*. Мастак вокладкі *Я. У. Шлыкаў*. Мастацкія рэдактары *Л. А. Дашкевіч*, *Г.-М. Жалезка*. Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *І. І. Дуброўскай*. Карэктары *К. І. Даніленка, В. С. Бабеня, Г. В. Алешка*.

Падпісана ў друк 20.06.2013. Фармат $60 \times 90^1/_{16}$. Папера афсетная. Гарнітура школьная. Друк афсетны. Ум. друк. арк. 10 + 0,25 форз. Ул.-выд. арк. 7,79 + 0,21 форз. Тыраж 16 150 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства
«Народная асвета» Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь.
ЛИ № 02330/0494083 ад 03.02.2009. Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск.

ААТ «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».
ЛИ № 02330/0150496 ад 11.03.2009.
Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск.